Banque CCINP : Ex. 29,30.

Rappel : intégrales comme fonctions de la borne

Exercice 1 (Ceci n'est PAS une intégrale à paramètre)**.** Soit $\lambda > 1$.

a) Déterminer l'ensemble de déf. de $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^\lambda} \frac{dt}{\ln(t)}$.

b) (i) Montrer que F se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.
(ii) Montrer que F se prolonge par continuité en 1.
(iii) Montrer que F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
(iv) Montrer que $F(x)/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\mu - 1}{\ln(t)} dt$ pour $\mu > 1$.

Continuité, Limites, équivalents, d'intégrale à paramètre

Exercice 2 (Transformée de Laplace de $t \mapsto 1/\sqrt{1+t}$ avec intro)**.**

a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} du$.

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

ii) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Soit $L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t}} dt$. Déterminer un équivalent de $L(x)$ en 0^+ et en $+\infty$

Exercice 3. Soit f définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}\ \mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Déterminer des équivalents simples de cette fonction en 0^+ et en $+\infty$.

Beaucoup, beaucoup de dérivation d'intégrale à paramètre aux oraux... souvent motivée par un calcul d'intégrale

Exercice 4.

a) Décomposer en éléments simples $F_a(X) = \dfrac{1}{(1+X)(1+aX)}$ pour $a \neq 1$

b) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t\,(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

i) Domaine de définition de F ?

ii) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de déf. et calculer F' de manière explicite.

c) Déterminer $F(0)$ puis calculer F.

d) Que vaut $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{u}{\tan(u)} du$?

Exercice 5 (transformée de Laplace du ln)**.** On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t).\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Déterminer une équation différentielle dont F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, puis résoudre cette équation différentielle.

Exercice 6 (L'intégrale de la Gaussienne, comme valeur particulière d'une intégrale à paramètre)**.** On note $G = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$. On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

a) Préciser l'ensemble de déf. de F, puis montrer qu'elle vérifie (sur un ensemble à préciser) une E.D. dont le second membre fait intervenir G.

b) Résoudre cette E.D. et en remarquant que F est bornée, retrouver ainsi la valeur de G.

c) **Bonus :** A l'aide d'une expression trouvée pour F grâce à l'E.D. obtenir un D.A. à deux termes significatifs de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 7 (partie réelle de la T.Laplace complexe d'une gaussienne)**.** Calculer, pour $x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx) \mathrm{d}t$ par deux méthodes :

a) à l'aide d'un développement en série entière de la fonction cosinus.

b) à l'aide d'une équation différentielle d'ordre 1 .

Quelques propriétés de la convolution

Exercice 8. On note $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}_\mathcal{B} = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on choisit g dans $\mathcal{C}_\mathcal{B}$.

a) **Définition :** Montrer que, si $f \in \mathscr{L}^1$, pour tout réel x, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. : on pose $(f \star g)(x) = \int_\mathbb{R} f(x-t)g(t)dt$.

b) **Commutativité :** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, (f \star g)(x) = \int_\mathbb{R} g(x-t)f(t)dt = (g \star f)(x)$.

c) **Continuité et bornitude de la convolée** Montrer que pour tout $f \in \mathscr{L}^1$, $f \star g \in \mathcal{C}_\mathcal{B}$

d) **Continuité de l'opérateur :** Montrer que $f \mapsto f \star g$ est une application linéaire entre $\mathscr{L}^1$ et $\mathcal{C}_\mathcal{B}$ vérifiant
$$\forall f \in \mathscr{L}^1,\ N_\infty^\mathbb{R}(f \star g) \leqslant N_1(f) N_\infty^\mathbb{R}(g).$$

e) **Caractère $\mathcal{C}^\infty$ si on convole par une fonction $\mathcal{C}^\infty$:** On suppose $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), g$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec toutes ses dérivées bornées, montrer que $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}, (f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$

Retour sur les équivalents

Exercice 9 (Un résultat plus précis que le théorème de la valeur initiale pour un exemple particulier)**.** On considère la transformée de Laplace de Arctan. Autrement dit, on pose $L(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \operatorname{Arctan}(t) dt$.

Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $L(x)$.

Exercice 10 (Un résultat plus précis que le théorème de la valeur finale de f pour un exemple particulier)**.** Soit $f(t) = \frac{1}{1+t}$.

Montrer que sa transformée de Laplace $L(f)$vérifie : $L(f)(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Transformée de Laplace du sinus cardinal : que faire hors du cadre Lebesgue intégrable ?

Exercice 11. En étudiant $L(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} \sin(t)}{t} dt$, obtenir la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Indication – On montrera que L est dérivable sur $]0, +\infty[$, on calculera L', qu'on primitivera, puis on montrera la continuité de L en 0 pour obtenir la valeur de $L(0)$.