Banque CCINP : Ex. 25,26,27.

Deux suites d'intégrales sur un segment... exercices de premières années... ?...

Exercice 1. Soit $I_n = \int_0^1 [\ln(1+x)]^n dx$.

a) Déterminer la limite de (I_n) avec et sans le T.C.D.

b) Déterminer un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$

Exercice 2. Etudier la limite quand $n \to +\infty$ de $I_n = \int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n} dx$ avec et sans le T.C.D.

Convergence dominée

Exercice 3. Soit $a > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx} dx$. Existence de I_n et limite de la suite (I_n).

Exercice 4. Etudier les limites quand $n \to +\infty$ de :

a) $\int_0^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$,

b) $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx$

Exercice 5. Soit $I_n = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^n) dt$.

a) Justifier que I_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Etudier la limite de (I_n) quand $n \to +\infty$.

c) Déterminer un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.

Situations d'intégration terme à terme

Exercice 6. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} dt$.

a) Trouver la limite ℓ de I_n.

b) Trouver un équivalent de $\ell - I_n$.

c) Justifier à l'aide du développement en série entière de $\ln(1+x)$ vu en cours que :
$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.

d) En déduire un D.A. à trois termes de I_n.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} dx$.

a) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(np+1).(np+2)}$.

Exercice 8. Justifier que la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 9. Soit (a_n) une suite croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Exercice 10. Soit $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1+n^2t^2}$, montrer que $f \in \mathscr{L}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et calculer $\int_0^{+\infty} f$.

Exercice 11. Pour les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$, obtenir l'équivalent bien connu $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ en « donnant un coup de loupe » au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ où la question semble se jouer, au moyen d'un changement de variable tel que $\sin t = 1 - \frac{u}{n}$.