MP **Samedi 21 novembre 2026**

Devoir surveillé 3 (3h pour les maths 1h pour l'info)

Aucun appareil électronique n'est autorisé.

Problème

Partie I : convergence de séries par transformation d'Abel

Q 1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

(Cette égalité est appelée intégration par partie discrète ou transformation d'Abel).

Q 2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

Q 2.a Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

Q 2.b En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

Q 2.c En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

Q 3. Exemple. Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q 3.a Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

Q 3.b Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Q 4. Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

Dans tout ce sujet, on notera U sa fonction somme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Partie II : convergence uniforme de séries par transformation d'Abel

Q 5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n,

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z).$$

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}, |F_n(z)| \leq M$ (on dit que la suite (F_n) est *uniformément bornée*).

Q 5.a Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A.

Q 5.b A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.

Q 6. Exemple. Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Q 6.a Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}, 1 - e^{ix} = -2i \sin(x/2) e^{ix/2}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.

En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Q 6.b On note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$. En considérant la suite $(S_n(x_n))$ pour une suite (x_n) bien choisie, qui tend vers zéro, montrer que la série $\sum u_n$ ne converge uniformément sur aucun intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$.

Q 6.c (*Cette question sera utilisée pour l'étude de U au IV*). On fixe un entier naturel p quelconque, on considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \frac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Indication – On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration, que :

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad \frac{x}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Q 6.d Le théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ de la somme d'une série de fonctions s'applique-t-il à U sur $]0, 2\pi[$?

Partie III : étude quantitative de la discontinuité en 0 de la fonction U

La Q6.b ne permet pas de conclure sur la continuité ou non de U en 0. Dans cette partie, on va montrer que U est effectivement discontinue en 0 et plus précisément que :

$$U(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{C}{\sqrt{x}} \quad \text{avec } C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

(On pourrait même montrer que $C = \sqrt{\pi/2}$ mais nous ne le ferons pas ici).

Q 7. a Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

converge.

Q 7. b Montrer également que, pour tout $A > 0$,

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt \right| \leq \frac{2}{\sqrt{A}}.$$

Q 8. Dans toute la suite on note $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ et on prolonge f par continuité en 0.

On remarque que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x}U(x) = x.\sum_{k=1}^{+\infty} f(k.x)$, et il est tentant d'interpréter, pour $x > 0$, le membre de droite de cette égalité comme une « somme de Riemann » de pas x sur l'intervalle non borné $]0, +\infty[$, ce qui n'est bien sûr pas le cadre naturel des sommes de Riemann, mais donne un guide pour la preuve qui suit.

Q 8.a **A admettre pour le D.S. et à faire à la maison :** Une généralisation du théorème du programme sur les sommes de Riemann pour les fonctions continues sur un segment : si $A > 0$ et $h \in \mathcal{C}([0, A], \mathbb{R})$ alors pour tout $x > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x \sum_{k=1}^{\lfloor A/x \rfloor} h(kx) = \int_0^A h(t)\, dt.$$

Indication – Utiliser l'uniforme continuité de h.

Bien sûr, pour la suite, on utilisera ce résultat pour la fonction f ci-dessus, donc pour chaque $A > 0$ fixé, on admettra que :

$$\lim_{x\to 0^+} x \sum_{k=1}^{\lfloor A/x \rfloor} f(kx) = \int_0^A f(t)\, dt.$$

Q 8.b

Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $m \geq 1$.

En utilisant une transformation d'Abel, et la même technique qu'à la Q.6.a, montrer que, pour tout $N \geq m$,

$$\left| \sum_{k=m}^{N} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{kx}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{mx}\,|\sin(x/2)|}.$$

Q 8.c Soit $A > 0$. Montrer que, pour $x \in]0, \pi[$:

$$\left| x \sum_{k=\lfloor A/x \rfloor + 1}^{+\infty} f(kx) \right| \leq \frac{\pi}{\sqrt{A}}.$$

Q 9. En utilisant les questions précédentes, démontrer que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, U(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Partie IV : retour sur la discontinuité de U en 0, avec la théorie de Fourier

On a montré au II que la fonction $U : x \in]0, \pi] \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est continue sur $]0, \pi]$. On va montrer ici, indépendamment du III, que U n'est pas continue par morceaux sur $[0, \pi]$. On raisonne *par l'absurde* et on note alors S la fonction continue sur $[0, \pi]$ qui coïncide avec U sur $]0, \pi]$.

On considère l'espace vectoriel

$$E = C([0, \pi], \mathbb{R}).$$

Pour $f, g \in E$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(t) g(t)\, dt.$$

On admet que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E. On munit désormais E de ce produit scalaire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in [0, \pi]$ on pose

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Et on admet que la famille $(e_n)_{n \geq 1}$ est orthonormale. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et

$$F_N = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_N).$$

Le cours dit alors que pour tout $f \in E$, le projeté orthogonal de f sur F_N est

$$P_N(f) = \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k.$$

Q 10. a En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle^2 \leq \|f\|^2.$$

Q 10. b **Inégalité de Bessel :** En déduire que, pour toute fonction $f \in E$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \langle f, e_k \rangle^2 \leq \|f\|^2.$$

Q 11 **Application à la fonction U :**

Q 11. a A l'aide de la Q.6.c, montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle S, e_p \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}.$$

Q 11. b En appliquant l'inégalité de Bessel à S, obtenir une contradiction, ce qui redémontre que U n'admet pas de limite finie en 0^+.