Devoir surveillé 3 : solution

Parties I,II, IV d'après CCINP MP 2014

Partie 1 : convergence de séries par transformation d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}.$$

Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k-1$.

$$S_n = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k + a_n B_n - a_1 B_0$$

$$= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k - \left(a_0 - a_1\right) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k + a_n B_n$$

2. (a) Par la formule des sommes télescopiques, on sait que $\sum_{k=0}^{N-1} a_k - a_{k+1} = a_0 - a_N$, donc la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge si, et seulement si, la suite (a_n) converge.
Or ici par hyp. la suite (a_n) converge (vers zéro), donc la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge.

   (b) Vérifions que la suite (S_n) des sommes partielles est convergente. D'après la Q1,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k + a_n B_n.$$

Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.

Le premier terme est somme partielle de la série de terme général (TG) $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$.
Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(\ |B_n|\ )$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left|\left(a_k - a_{k+1}\right) B_k\right| \leq \left|a_k - a_{k+1}\right| .M = M.\left(a_k - a_{k+1}\right)$$

car (a_k) est une suite décroissante.

Ainsi, $(a_k - a_{k+1})\, B_k$ est dominée par le TG d'une série absolument convergente.

Donc $(a_k - a_{k+1})\, B_k$ est lui même le TG d'une série AC ce qui termine la démonstration de cette question.

   (c) **Enoncé du théorème sur les séries alternées spéciales :** Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum(-1)^k a_k$ est une série convergente.

Pour démontrer ce théorème ici : Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente avec $b_k = (-1)^k$ après avoir justifié que la suite $(B_n) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)$ est une suite bornée. On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \{1, 0\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$ ce qui assure bien le résultat demandé.

3. (a) On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.

Par théorème, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{(-2i)\sin(n\theta/2)}{(-2i)\sin(\theta/2)} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

N.B. Bien sûr cette question « calculer » est vague, on peut se demander où arrêter le calcul. La réponse est ici « culturelle », c'est un calcul qu'il est classique de mener à ce terme-ci.

(b) (i) Comme $\left|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ donc lorsque $\alpha > 1$, la série de TG $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.

(ii) Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.

(iii) Soit $\alpha \in]0,1]$. On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question 2b.

Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence. La suite $(a_n) = (1/n)$ est clairement décroissante et tend vers 0. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, |B_n| := \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ majorant indépendant de n, donc la suite des (B_n) est bornée.

Conclusion, avec la Q2, la série est convergente (bien que non absolument dans ce cas).

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z_n = \frac{e^{inx}}{n^{1/2}}$.

Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la question précédente assure la convergence de la série de TG (z_n) et on sait alors que cette convergence équivaut à celle des séries de terme généraux $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$.

On sait donc en particulier convergence de la série de TG $\mathrm{Im}\,(z_n) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}, u_n(x) = 0$ ce qui est bien le TG d'une série convergente. Conclusion : cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Partie II : convergence uniforme de séries

5. (a) (i) On montre que la suite $(a_n F_n)$ CvU vers la fonction nulle sur A. En effet

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall z \in A, |a_n F_n(z)| \leq |a_n| \times M$$

et cette majoration est indépendante de z,donc

$$\|a_n F_n\|_{\infty,A} \leq |a_n| M = a_n.M$$

Comme le majorant $(a_n M)$ tend vers 0, la suite de fonctions $(a_n F_n)$ CvU vers 0 sur A.

(ii) Notons comme précédemment, que $\forall k \in \mathbb{N}, |a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}$ par décroissance de (a_n). Ainsi, $\forall z \in A, |(a_k - a_{k+1}) F_n(z)| \leq (a_k - a_{k+1}) M$ et cette majoration par le TG d'une série convergente (car la suite (a_k) est convergente) indépendant de z assure que la série de fonction $\sum_{k\geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A.

(b) La transformation d'Abel donne l'égalité de fonctions, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f_k = a_n F_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) F_k \quad (*)$$

Or dans le membre de droite la suite de fonctions $(a_n F_n)$ CvU sur A et la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) F_k\right)$ CvU sur A (d'après ce qui précède). Donc le membre de gauche de $(*)$ converge aussi uniformément sur A ce qui signifie bien que la série de fonctions $(\sum a_k f_k)$ CvU sur A.

6. (a) (i) On factorise $1-e^{ix}$ par $e^{ix/2}$ pour obtenir : $1-e^{ix} = e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2}) = -2i\sin(x/2)e^{ix/2}$.

(ii) On vérifie que les hypothèses du 5.b) sont vérifiées.

(H1) La suite $(a_n) := (1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle.

(H2) Soit $a \in]0,\pi[$. Soit $x \in [a, 2\pi - a]$. Notons tout de suite que $e^{ix} \neq 1$ car $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)\right|$$

donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| = \frac{|\sin(nx/2)|}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

Or $x \in [a, 2\pi - a]$ donc $(x/2) \in [a/2, \pi - a/2]$.
Par hypothèse sur a,

$$0 < a/2 \leq \pi/2 \leq \pi - a/2 < \pi$$

donc les variations de la fonction sin sur $[0, \pi]$ donnent :

$$0 < \sin(a/2) = \sin(\pi - a/2) \leq \sin(x/2) = |\sin(x/2)|.$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, 2\pi - a], \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin(a/2)}$$

ce qui assure qu'en notant $f_k(x) = \sin(kx)$ et $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ que la suite (F_k) est uniformément bornée.
Avec (H1) et (H2), la Q 5 dit que la série $\sum a_k f_k$ converge uniformément sur $A = [a, \pi - a]$.
(iii) On applique le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions : chaque fonction $a_k f_k$ est continue sur A, et la série converge uniformément sur A, donc la somme U de la série est une fonction continue sur A. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on conclut que U est continue sur l'ouvert $]0, 2\pi[$.

Q 6.b On considère la suite des $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. .
Alors

$$S_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{k}{n})}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{k}{n})}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{k}{n})}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\Big), \quad (1)$$

la dernière parenthèse est une somme de Riemann de la fonction continue (prolongée par continuité en 0) $x \to \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ sur $[0, 1]$.
Donc

$$\Big(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{k}{n})}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\Big) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} A = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx > 0$$

et donc avec (1),

$$S_n(x_n) \sim A\sqrt{n}$$

Donc $S_n(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad (2)$.
Or *par l'absurde*, si (S_n) convergeait uniformément vers une limite S sur $[0, a]$ comme à partir d'un certain rang n_0, $x_n \in [0, a]$, on aurait

$$|S_n(x_n)| \leq \|S_n\|_{\infty,[0,a]} \quad (3)$$

Et si (S_n) CvU sur $[0, a]$ en particulier la suite des $(\|S_n\|_{\infty,[0,a]})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est *bornée* (4).
Avec (2), (3) et (4), on a une *contradiction*.

Q 6.c. D'après la question 5.b précédente, il suffit de démontrer que la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px))_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $[0, \pi]$.
D'après les calculs précédents,

$$\forall x \in]0, \pi], A_n(x) = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)\right| = |\sin(px)|. \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leq \left|\frac{\sin(nx/2)\sin(px)}{\sin(x/2)}\right|.$$

Pour $x \in]0, \pi]$, on a d'après l'énoncé, $0 < \frac{x}{\pi} \leq \sin(x/2)$ ce qui, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ donne $0 < \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi], A_n(x) \leq \frac{|\sin(px)|\pi}{x}.$$

Or, il est bien connu que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout t réel. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi], A_n(x) \leq \frac{p|x|\pi}{x} = p\pi.$$

Cette inégalité est encore valable pour $x = 0$ car la somme est nulle. Ainsi, la suite (A_n) est uniformément bornée. De plus, $(1/\sqrt{n})$ est décroissante de limite nulle donc par 5.b. $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ cvu sur $[0, \pi]$.

Q 6. d Le théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ de la somme d'une série de fonctions $\sum u_n$ demande de vérifier la CvU sur tout segment de la série $\sum u_n'$.

Or ici, pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $u_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$.

Lemme : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers zéro.

Application du lemme : on en déduit que pour tout x, $u_n'(x)$ ne tend pas vers zéro (car sinon $\cos(nx) = u_n'(x)/\sqrt{n}$ tendrait encore plus vers zéro), et donc la série $\sum u_n'(x)$ diverge grossièrement. Le théorème ne s'applique pas.

Dém. du lemme : En effet, si $\cos(nx) \to 0$, alors

$$\cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1 \longrightarrow -1.$$

Mais $(\cos(2nx))$ est une sous-suite de $(\cos(nx))$, donc elle devrait également tendre vers 0 , ce qui est contradictoire. □

N.B. Cela ne veut pas dire que U n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 2\pi[$ mais il faudrait regarder cela autrement !

Q 7.a. La fonction $f : t \in]0, +\infty[\to \sin(t)/\sqrt{t} \in \mathbb{R}$ est continue et en 0, comme $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \sqrt{t}$ et donc f se prolonge par continuité en 0, ce qui donne la convergence de l'intégrale sur $[0, 1]$.

Pour étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$, on effectue une intégration par parties sur $[1, +\infty[$

$$\int_1^A \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right]_1^A - \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt \quad (*)$$

Comme le cosinus est borné, $\cos(A)/\sqrt{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et l'intégrale du second terme de $(*)$ converge absolument car $|\cos(t)/t^{3/2}| \leq 1/t^{3/2}$ et par comparaison à l'exemple de Riemann, on sait donc que $t \mapsto \cos(t)/t^{3/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi le membre de droite de $(*)$ a une limite finie quand $A \to +\infty$, c'est donc aussi le cas du membre de gauche, donc m'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Au total, on a bien montré la convergence de l'intégrale sur $[0, +\infty[$.

Q 7.b. On réécrit l'I.P.P. du a) avec d'autres bornes $0 < A < B$:

$$\int_A^B \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right]_A^B - \frac{1}{2}\int_A^B \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt.$$

En faisant tendre B vers $+\infty$, ce qui est possible par a), on obtient

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{\cos A}{\sqrt{A}} - \frac{1}{2}\int_A^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{2}\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{2}{\sqrt{A}}.\end{aligned}$$

Q 8.a Les sommes

$$x \sum_{1 \le k \le A/x} h(kx)$$

sont des sommes de Riemann associées à l'intégrale de h sur $[0, A]$, avec un pas égal à x.
Le problème est que le théorème du programme n'est énoncé qu'avec des pas de la forme A/n, d'où la nécessaire généralisation, mais la preuve (H.P !) avec la continuité uniforme s'applique !

Q 8.b. On pose

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{kx}}, \qquad b_k = \sin(kx).$$

La suite (a_k) est positive et décroissante et tend vers zéro.
On note

$$B_j = \sum_{k=m}^{j} b_k.$$

Lemme : Avec le même calcul qu'à la question 6.a), pour tout j,

$$|B_j| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Preuve du lemme : $|B_j| = |\sum_{k=m}^{j} b_k| \le |\sum_{k=m}^{j} e^{ikx}| = |\frac{e^{mix} - e^{i(j+1)x}}{1 - e^{ix}}| = |\frac{1 - e^{i(j+1-m)x}}{1 - e^{ix}}|$ et donc la majoration de la Q.6a ii) s'applique avec $n = j + 1 - m$. □
La formule d'Abel ou d'I.P.P. discrète donne :

$$\sum_{k=m}^{N} a_k b_k = a_N B_N + \sum_{k=m}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

En prenant les valeurs absolues,

$$\left|\sum_{k=m}^{N} a_k b_k\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|} \left(a_N + \sum_{k=m}^{N-1} (a_k - a_{k+1})\right)$$
$$= \frac{a_m}{|\sin(x/2)|}.$$

Ainsi comme demandé,

$$\left|\sum_{k=m}^{N} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{kx}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{mx}\,|\sin(x/2)|}.$$

mais comme le majorant est indépendant de N, on peut aussi passer à la limite quand $N \to +\infty$ dans cette formule, ce qui donne :

$$\left|\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{kx}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{mx}\,|\sin(x/2)|}.$$

Q 8.c
D'après la question précédente, avec $m = \lfloor A/x \rfloor + 1$

$$\left|x \sum_{k > A/x} f(kx)\right| \le \frac{x}{\sqrt{mx}\,|\sin(x/2)|}.$$

Par définition de m, on a

$$mx \ge A.$$

D'autre part, pour $0 < x \le \pi$, par concavité du sinus, comparaison à la corde d'équation $y = 2x/\pi$, on a l'inégalité :

$$\sin(x/2) \ge \frac{x}{\pi}$$

On en déduit

$$\left| x \sum_{k>A/x} f(kx) \right| \leq \frac{x}{\sqrt{A}\sin(x/2)} \leq \frac{x}{\sqrt{A}} \frac{\pi}{x}.$$

Finalement,

$$\left| x \sum_{k>A/x} f(kx) \right| \leq \frac{\pi}{\sqrt{A}}.$$

Cette majoration est indépendante de x, dès lors que $0 < x \leq \pi$.

Q 9. On rappelle que

$$\sqrt{x}\, S(x) = x \sum_{k=1}^{+\infty} f(kx).$$

Soit $A > 0$. On décompose cette somme en deux parties :

$$\sqrt{x}\, S(x) = x \sum_{1\leq k\leq A/x} f(kx) + x \sum_{k>A/x} f(kx).$$

On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ donc

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x}\, S(x) - I\right| \leq & \left| x \sum_{1\leq k\leq A/x} f(kx) - \int_0^A f(t)\, dt \right| \\ & + \left| x \sum_{k>A/x} f(kx) \right| \\ & + \left| \int_A^{+\infty} f(t)\, dt \right|. \end{aligned}$$

D'après les questions 7.b et 8. c) :

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x}\, S(x) - I\right| \leq & \left| x \sum_{1\leq k\leq A/x} f(kx) - \int_0^A f(t)\, dt \right| \\ & + \frac{\pi}{\sqrt{A}} + \frac{2}{\sqrt{A}}. \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$.
On choisit d'abord A suffisamment grand pour que

$$\frac{\pi + 2}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puis, pour ce A fixé, la convergence des sommes de Riemann admise au 8.a), dit qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \alpha[$:

$$\left| x \sum_{1\leq k\leq A/x} f(kx) - \int_0^A f(t)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient alors

$$\left|\sqrt{x}\, S(x) - I\right| < \varepsilon.$$

Ainsi, on a bien montré que :

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

10. a) Par propriété-définition de la projection orthogonale, on sait que $P_N(f)$ et $(f-P_N(f))$ sont orthogonaux, donc par Pythagore appliqué à l'égalité $f = P_N(f) + (f - P_N(f))$, on a :

$$\|f\|^2 = \|P_N(f)\|^2 + \|f - P_N(f)\|^2$$

En particulier :

$$\|P_N(f)\|^2 \leq \|f\|^2 \quad (1)$$

Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_N)$ est orthonormale, on sait d'autre part que pour $P_N(f) = \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k$, on a :

$$\|P_n(f)\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle^2 \quad (2)$$

Avec (1) et (2) on a l'inégalité demandée par l'énoncé.

10. b)

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la question précédente donne

$$0 \leq \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle^2 \leq \|f\|^2.$$

La suite des sommes partielles

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle^2 \right)_{N \geq 1}$$

est croissante et majorée par $\|f\|^2$. Elle converge donc, ce qui établit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \langle f, e_k \rangle^2 \leq \|f\|^2.$$

C'est l'inégalité de Bessel.

11. a)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition du produit scalaire et de e_p,

$$\langle S, e_p \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} S(x) \sin(px) \, \mathrm{d}x.$$

D'après la question 6.c, la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$$

converge uniformément sur $[0, \pi]$. On peut donc intégrer terme à terme sur ce segment :

$$\langle S, e_p \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(px) \, \mathrm{d}x.$$

Par orthogonalité de la famille des fonctions sinus sur $[0, \pi]$, tous les termes de cette somme sont nuls, sauf celui correspondant à $n = p$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \langle S, e_p \rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{\pi} \sin^2(px) \, \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\langle S, e_p \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}.$$

11. b) On applique l'inégalité de Bessel à la fonction $S \in E$. On devrait avoir

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \langle S, e_p \rangle^2 \leq \|S\|^2.$$

Or, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{+\infty} \langle S, e_p \rangle^2 &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2p} \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

D'où la contradiction.

Tracé des sommes partielles de la série définissant U avec Geogebra :





