**Exemples de suites de fonctions : Cvs, CvU ?**

**Exercice 1.** Etudier la CVS et la CVU sur $\mathbb{R}$ pour la suite de fonctions $(f_n)$ définies par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$. S'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}$, y-a-t-il convergence uniforme sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 2.** Soit $f_n : [0,+\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \text{Arctan}(\dfrac{x+n}{1+nx})$.

Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

**Exercice 3** (CCINP 2025 : suite récurrente $u_{n+1}(x) = f(u_n(x))$ : bien pour revoir les techniques et résultats sur « $u_{n+1} = f(u_n)$ »).

Soit $f : x \in [0,1] \mapsto 2x(1-x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n = f \circ \cdots \circ f$ ( $n$ fois).

a) Montrer que $(f_n)$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction $g$ que l'on précisera. La convergence est-elle uniforme ?

b) Soit $a \in ]0,1/2[$. Montrer que ( $f_n$ ) converge uniformément sur [ $a, 1-a$].

**Exemples de séries de fonctions : CvS, CvN, CvU ?**

**Exercice 4.** Etudier la CVS, CVN, CVU sur $[0,+\infty[$ et sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$ de $\sum u_n$ avec $u_n(x) = nx^2\exp(-x\sqrt{n})$.

**Exercice 5.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arctan}(\frac{x}{n^2+x^2})$.

a) Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) On pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \text{Arctan}(\frac{x}{k^2+x^2})$.

Montrer qu'il existe un $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(2n) \geq C$.

Qu'en déduire pour la CVU de $\sum \text{Arctan}(\dfrac{x}{n^2+x^2})$ sur $\mathbb{R}$ ?

**Deux incontournables en variable complexe**

**Exercice 6** (Incontournable)**.** a) (i) Montrer à l'aide de l'I.T.Lagrange que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ CV vers $\exp(x)$.

(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $S_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

Justifier que $(S_n)$ converge uniformément sur tout disque fermé $D_f(0,R)$ de $\mathbb{C}$.

On admet ici que la somme de cette série est encore $\exp(z)$.

b) On note $f_n(z) = (1+\frac{z}{n})^n$.

En majorant la différence $f_n - S_n$ à l'aide de la formule du binôme, montrer que $f_n - S_n$ CVU vers 0 sur tous les disques fermés $D_f(0,R)$, puis que $(f_n)$ CV vers exp uniformément sur ces mêmes disques. .

c) Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\dfrac{i\pi}{n})^n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\dfrac{ni\pi}{n^2-1})^n$

**Exercice 7** (Incontournable)**.**

a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 1$. Démontrer que $\sum_n n^{-z}$ converge. On note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}$.

b) Montrer que la fonction $\zeta$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C},\ \text{Re}(z > 1\}$.

**Dérivation terme à terme et étude de sommes de séries de fonctions**

**Exercice 8.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2^{n+1}}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{2^n}}$

a) Montrer que $\sum u_n$ et $\sum u_n'$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ n'est pas dérivable en 0.

**Exercice 9.** Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

a) Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que : $\forall x \in [0,1], 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) x$.

c) La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ?

d) Quelle est sa limite en $+\infty$ ?

e) Dresser le tableau de variation de $f$.

**Exercice 10.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, où $x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$ puis calculer $f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

b) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D_f$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

c) À l'aide de développements limités en 0 , déterminer trois constantes réelles $a, b$ et $c$ telles qu'au voisinage de 0

$$\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c + o(1)$$

d) En déduire $\lim_{x\to 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} - \frac{1}{x^2}\right)$ et donc qu'en un certain sens $\sum_{n=0}^{+\infty} n = -1/12$

**Limites ou équivalents de sommes de séries de fonctions**

**Exercice 11** (Cas d'une série ne vérifiant pas le T.S.A. mais s'y ramenant)**.** a) Justifier qu'on peut poser, pour tout $x > 1$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.

b) Montrer que la fonction $f$ est continue sur $]1, +\infty[$.

c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**Exercice 12.** Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{x}{n^2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi\sqrt{x}$.

*Indication* – Le nombre $\pi$ se cache souvent derrière une ...

**Exercice 13.** On considère pour tout $x \in ]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n(x))$ définie par $u_n(x) = \frac{a^n}{x+n}$ avec $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq 1$ et $a \neq 1$.

a) Etudier la convergence simple, uniforme, normale de la série $\sum u_n(x)$.

b) Notons $S(x)$ la somme de cette série.

i) Montrer que $S$ est continue sur $]0, +\infty[$.

ii) Montrer que $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x(1-a)}$.

**Exercice 14** (Fonction d'une variable entière )**.** Reprendre l'exercice 21 pl. S1, en notant $S(p) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^\alpha + p^\alpha}$ et en cherchant que équivalent de $S(p)$ quand $p \to +\infty$ par la méthode d'encadrement par des intégrales