

Banque CCINP : Ex 1, 5 (cf. ex. ci-dessous) et Ex. 6,7.

Séries à t.g. de signe constant ou ACV : équivalents, DL, encadrement par des intégrales

Exercice 1. Nature de $\sum u_n$ pour a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$, b) $u_n = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$.

Exercice 2. Nature de la série de terme général : $u_n = n^{-\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}$.

Exercice 3. Etudier les séries de termes généraux :

a) $v_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{2}{n+a}\right)^n$, ou $a > 0$.

b) $w_n = \left(\arccos\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^\alpha$ où $\alpha > 0$.

Exercice 4 (Séries de Bertrand). a) Banque CCINP Ex 5 : Etudier la série de t.g. $1/(n \ln^\beta(n))$ par comparaison avec une intégrale.

b) Généralisation : Nature, suivant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

Exercice 5. Nature suivant $\alpha > 0$ de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=2}^n \ln^2(k)$.

Exercice 6 (Avec le D.A. de H_n). a) Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ où γ est une constante réelle.

b) Soit $a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = a^{1+1/2+\dots+1/n}$.

Etudier la nature de la série de terme général u_n

Les paquets donnent des C.N. de convergence

Exercice 7 (Série harmonique/Bertrand : autre méthode pour la divergence par minoration).

a) Montrer que si $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n + \dots + u_{2n} \geq \frac{1}{2}$.

En déduire que la série harmonique (H_n) diverge.

b) Pour le cas d'une série de Bertand : montrer que pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\sum_{2^{k-1} < n \leq 2^k} \frac{1}{n \ln(n)} \geq \frac{1}{2 \ln(2)} \frac{1}{k}$$

En déduire que $\sum 1/(n \ln(n))$ est divergente

Exercice 8 (Les paquets comme C.N.). a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout

$$n \in \mathbb{N}^*, \frac{|\cos(2^n)|}{n} + \frac{|\cos(2^{n+1})|}{n+1} \geq \frac{C}{n+1}.$$

b) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{|\cos(2^n)|}{n}$.

Calculs de sommes :

Exercice 9. Soit $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$. Calculer $S = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n$.

Exercice 10. a) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

Calculer la limite quand $n \rightarrow +\infty$, de $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Exercice 12 (Avec le D.A. de H_n). a) Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ où γ est une constante réelle.

b) Soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$. Montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 13. Convergence et somme de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{n}([\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}])$. Indication : si n et $n+1$ sont dans le même intervalle $[\dots]$ alors $u_n = \dots$.

Lien suite/série

Exercice 14. a) Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{1}{n+k}\right) - n$$

Indication – On pourra considérer $u_{n+1} - u_n$.

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x$.

c) En déduire que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

Exercice 15. Soit $\alpha > 0$ et (u_n) définie par $u_1 > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

CNS sur α pour que (u_n) CV.

Séries à terme général de signe variable

Exercice 16. Pour tout $n \geq 2$, on pose $U_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

L'énoncé faisait admettre que $|\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| = -\ln\left(1 + \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}\right)$. Vérifiez-le.

a) La série $\sum \ln(U_n)$ est-elle à signe alternée ?

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq 1/2$. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| > 0$$

c) La série $\sum \ln(U_n)$ vérifie-t-elle les conditions du théorème de convergence des séries alternées ?

d) Etudier la convergence de $\sum \ln(U_n)$ à l'aide d'un D.L. à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$.

Exercice 17. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Etudier la suite (u_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

b) Soit $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{R}^*$. Etudier la nature de la série de t.g. $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{k}{n^{5\alpha}}\right)$.

Paquets finis pour les séries à t.g. de signe variable

Exercice 18 (Paquets de deux avec un t.g. qui tend vers zéro). a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* |\cos(\sqrt{n}) - \cos(\sqrt{n+1})| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

b) En déduire l'étude de la convergence de série réelle de terme général $(-1)^n \cos(\sqrt{n})/n$.

Exercice 19. A partir de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, on forme une nouvelle série, en écrivant les termes dans l'ordre suivant : p termes positifs, q termes négatifs, p termes positifs, etc, où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ fixés, l'ordre relatif des termes positifs n'est pas changé, ni celui des termes négatifs. Montrer que la série obtenue converge alors vers $\ln(2) + \frac{1}{2} \ln(p/q)$.

Indication : On considérera les sommes partielles de la forme $S_{n(p+q)}$ de cette série pour $n \rightarrow +\infty$. Ensuite expliquer pourquoi la convergence de ces sommes partielles entraîne aussi celle des autres.

Exercice 20. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ est convergente.

Suites doubles (familles sommables)

Exercice 21. A quelle condition nécessaire et suffisante sur le réel α la série double $\sum_{p,q \geq 1} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}$ converge-t-elle ?

Exercice 22. Montrer la convergence et la somme de la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exercice 23. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} = e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)}.$$