

Trigonalisations concrètes

Exercice 1. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Version améliorée des trois cas du cours (réduction de Jordan des matrices 3×3)). Soit E un K -e.v. de dim. 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non diagonalisable, mais trigonalisable.

a) Combien u peut-il avoir de valeurs propres ?

b) On se place dans le cas où u a deux valeurs propres distinctes α et β avec $\chi_u = (X - \alpha)(X - \beta)^2$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

c) On suppose désormais que u admet une unique valeur propre, qu'on note λ et que $u \neq \lambda \text{id}$.

(i) Que dire de $(u - \lambda \text{id})^3$? En fait les deux questions qui suivent sont basées sur la réduction de $v = u - \lambda \text{id}$

(ii) Si $(u - \lambda \text{id})^2 \neq 0$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

(iii) Si $(u - \lambda \text{id})^2 = 0$ montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

d) Mettre en oeuvre concrètement la réduction précédente sur la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nilpotence, unipotence

Exercice 3 (Une réduction des matrices de trace nulle et application). Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. finie.

a) Définir la trace d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle, si on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})$, on ait $a_{1,1} = 0$.

c) En déduire par récurrence que si $\text{Tr}(f) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ ait toutes ses entrées diagonales nulles.

d) En déduire que toute matrice de trace nulle peut s'écrire comme la somme de deux matrices nilpotentes.

Exercice 4. A l'aide de l'exercice précédent, déterminer le s.e.v. de $M_n(\mathbb{K})$ engendré par l'ensemble des matrices nilpotentes.

Exercice 5 (Propriété des matrices de Jordan). Soit $J \in M_n(K)$ une matrice de Jordan à diagonale nulle i.e. telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $J(i, i+1) = 1$ et pour $j \neq i+1$, $J(i, j) = 0$.

a) Montrer que J et J^T sont semblables.

b) Soit $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Montrer que J et λJ sont semblables.

c) On appelle d'une manière générale matrice de Jordan toute matrice de la forme $\alpha I + J$ avec J comme ci-dessus.

On admet ici le théorème de réduction de Jordan (H.P.) : toute matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont des matrices de Jordan. Montrer que toute matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.

Exercice 6 (Caractérisation des unipotents). Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f = \text{id} + n$ où n est un endomorphisme nilpotent,

(ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f admet une matrice de la forme $I + T$ où T est triangulaire sup. stricte,

(iii) toutes les racines de χ_f dans $\mathbb{C}$ sont égales à 1.

Exercice 7 (Grand classique... résultat à connaître absolument). Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = \dots = \text{Tr}(A^n) = 0$ alors A est nilpotente.

Exercice 8 (Variante du précédent, version unipotente). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ Montrer que si $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = \dots = \text{Tr}(A^n) = n$ alors la seule valeur propre de A est 1.

Exercice 9. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . a) Montrer que les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u .

b) Exprimer les coefficients des termes en X^{n-1} et X^{n-2} de χ_u en fonction de $\text{tr}(u)$ et $\text{tr}(u^2)$. c) On suppose u de rang 2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{tr}(u)$ et $\text{tr}(u^2)$ pour que u soit trigonalisable, diagonalisable ?

Applications de la trigonalisation

Exercice 10 (Application aux morphismes multiplicatifs). Soit $\Phi : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\text{a) } \forall (A, B) \in M_2(\mathbb{C})^2, \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B),$$

$$\text{b) } \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Phi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda$$

Montrer que $\Phi = \det$.

N.B. On peut montrer avec des hypothèses assez faibles, que les Φ vérifiant a) sont toujours de la forme $\varphi \circ \det$ avec φ multiplicative dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{K}$).

Exercice 11 (Application à une suite récurrente linéaire d'ordre trois). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite à valeurs réelles définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}.$$

a) **Vectorialisation :** Pour chaque entier n , on définit un vecteur $U_n \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ par $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

i) Expliciter une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

ii) En déduire une relation matricielle simple entre U_n et U_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que A est semblable à une matrice

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

où l'on précisera la valeur de a et b .

c) En déduire de la première partie une écriture *explicite* de U_n en fonction de n , P et P^{-1} .

d) En déduire une formule explicite donnant u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. Montrer que dans un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$ il existe toujours au moins $n(n-1)/2$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes.

Indication – Soit H un tel hyperplan. Justifier qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $H = \{X \in M_n(\mathbb{C}), \text{Tr}(AX) = 0\}$ et se ramener au cas où A est une matrice triangulaire.

Sous-espaces caractéristiques

Exercice 13. a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer *tous* les s.e.v. stables par l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A

Exercice 14. Soit E un K -e.v. et $L \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_L soit scindé : $\chi_L = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\omega_i}$ (hyp. toujours vérifiée si $K = \mathbb{C}$). On note aussi $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(L - \lambda_i \text{id})^{\omega_i}$ les s.e.v. caractéristiques et $\mu_L = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\nu_i}$ le polynôme minimal.

Pour alléger on note λ au lieu de λ_i une v.p. de L . et ν et ω pour ν_i et ω_i .

a) Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'endomorphisme induit L_{Γ_λ} .

b) Justifier que la suite des noyaux $(\ker((L - \lambda \text{id})^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'au rang ν , puis constante. En particulier le s.e.v. caractéristique $\ker(L - \lambda \text{id})^\omega$ coïncide avec $\ker(L - \lambda \text{id})^\nu$.

Exercice 15 (Annoncé dans le cours). Montrer que toute matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{C})$ admet une racine carrée dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Idee de la réduction sur les s.e.v. caractéristiques : il suffit de prouver le résultat pour les matrices de la forme $\lambda I + N$ avec $\lambda \neq 0$ et N nilpotents.

Idee pour une racine carrée de $I + N$ avec N nilpotente : avec la formule donnée par le polynôme de Taylor de $\sqrt{1+x}$.