Banque CCINP : Ex. 25. 1), 28, 29.1 et 29.2),

Intégrabilité ou convergence d'intégrale

Exercice 1. Etudier l'intégrabilité de f sur I dans les cas suivants :

a) $f(t) = \dfrac{e^t \sin(t)}{1+t^2e^t}$ avec $I = \mathbb{R}$,

b) $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \sin(\dfrac{1}{\sqrt{t}})$ avec $I =]0, +\infty[$,

c) $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}$ avec $I =]0, 1[$.

d) $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t+e^t}$ avec $I =]0, +\infty[$,

e) $f(t) = \ln(t)^{-\ln(t)}$ avec $I =]1, +\infty[$.

Exercice 2. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\text{th}(x))dx$ et de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}dx$.

Exercice 3. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos^2(t)dt$.

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}\, dt$ pour $\alpha > 0$.

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \cdot \left(1 + \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\right) dt$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$.

e) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin t}{t+\cos t} dt$

Exercice 4 (CCINP 2025)**.** On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{t^2+1}\, \mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de I.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}, J(x) = \int_0^x \frac{t|\sin(t)|}{t^2+1}\, \mathrm{d}t$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(u+k\pi)\sin(u)}{(u+k\pi)^2+1}\, \mathrm{d}u$.

c) L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

Avec des calculs d'intégrales en plus

Exercice 5. Existence et calcul de :

a) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}} dt$

b) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan}(x)}{x^2} - \frac{1}{x(1+x^2)}\right) dx$

c) $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\ln(\frac{1}{x})}dx$ en admettant la valeur de l'intégrale de la Gaussienne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 6 (IMT MP 2025)**.** Soit $f : x \mapsto \ln(1+\tan x)$.

a) Donner le domaine de définition de f et montrer que le graphe de f admet un point de symétrie.

b) Convergence et calcul de $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 7 (Fonctions rationnelles cf. Halloween)**.** Existence et calcul de :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2.(x+2)^2}$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx$ *Ne pas se jeter sur la D.E.S. ici !*

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+ax+b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 - 4b < 0$.

Intégration des relations de comparaisons

Exercice 8 (Rédaction précise d'une idée donnée pl. S1)**.** Déterminer un équivalent simple de la fonction Arccos en 1^- par intégration des relations de comparaison.

Exercice 9 (CCINP 2025)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(]0,1], \mathbb{R})$ telle que $|f'(t)| \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$.

a) Déterminer un équivalent en 0^+de $F : x \mapsto \int_x^1 |f'(t)|\, \mathrm{d}t$.

b) En déduire que $xf(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

c) Montrer que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.