

Interrogation D.L. : solution

a) Comme le D.L. de $\operatorname{ch}(x) - 1$ commence par $x^2/2$ on peut se contenter de développer le sinus à l'ordre 4.

De même comme le DL de $\sin(x)$ commence par x , le D.L. à l'ordre 5 du $\operatorname{ch}(x) - 1$ suffit.

Donc $f(x) := \sin(x) \cdot (\operatorname{ch}(x) - 1) = (x - x^3/6 + o(x^4)) \cdot (x^2/2 + x^4/24 + o(x^5))$.

Alors $f(x) = x^3/2 + x^5/24 - x^5/12 + o(x^6)$.

Donc

$$f(x) = x^3/2 - x^5/24 + o(x^6).$$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)} = \sqrt{1+u}$ avec $u = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4) \sim -x^2/2$ donc $o(u^2) = o(x^4)$.

Ainsi on développe à l'ordre 2 : $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 - u^2/8 + o(u^2)$

Et $f(x) = 1 + (-x^2/2 + x^4/24)/2 - (x^2/2)^2/8 + o(x^4) = 1 - x^2/4 + x^4/48 - x^2/32 + o(x^4)$.

$$f(x) = 1 - x^2/4 - x^4/96 + o(x^4).$$

c) Notons $g(x) = (1+x)^{1/x} = \exp(\ln(1+x)/x)$.

Avec $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$ quand $x \rightarrow 0$, on a $g(x) = \exp(1 - x/2 + \mathcal{O}(x^2)) = e \cdot \exp(-x/2 + \mathcal{O}(x^2))$.

Donc

$$(1+x)^{1/x} = e \cdot (1 - x/2 + \mathcal{O}(x^2)).$$

A titre de comparaison, voici les calculs pour obtenir un D.L. à la précision $o(x^2)$:

Avec $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$ on a $g(x) = \exp(1 - x/2 + x^2/3 + o(x^2))$.

Donc $g(x) = e \cdot \exp(-x/2 + x^2/3 + o(x^2))$

Avec $\exp(u) = 1 + u + u^2/2 + o(u^2)$ on a :

$\exp(-x/2 + x^2/3 + o(x^2)) = 1 + (-x/2 + x^2/3) + (-x/2)^2/2 + o(x^2)$.

Donc $g(x) = e \cdot (1 - x/2 + x^2/3 + x^2/8 + o(x^2))$.

Donc

$$(1+x)^{1/x} = e(1 - x/2 + 11x^2/24 + o(x^2)).$$