MP

D.M. 5 : séries numériques

D.M. obligatoire pour le lundi de la rentrée

Problème 1

1) **Développement asymptotique des sommes partielles $U_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p}}$**

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on pose donc $U_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

a) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, décroissante, on pose pour tout $n \geq \lceil a \rceil + 1$, $\delta_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$.
Montrer que pour tout $n \geq \lceil a \rceil + 1$, $\delta_n \geq 0$ et que $\sum \delta_n$ converge.

b) Montrer qu'il existe un réel L tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \right) = L + 2.$$

c) Soit $\theta > 1$. Justifier l'existence de $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ et en trouver un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.

(i) Étudier la série de terme général $(v_{n+1} - v_n)$ et en déduire que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2\sqrt{n}}$.

(ii) Déterminer un équivalent de $v_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(iii) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant, où l'on précisera la valeur de C :

$$U_n \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + L + \frac{C}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

2) **Application au D.A. du reste de la série alternée correspondante :**

a) On note pour tout $n \geq 1$, $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$. Justifier que R_n est bien défini.
On note aussi $S = R_0 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$.

b) Exprimer R_{2n-1} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n}.

c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera en fonction de L et S, tels que :

$$R_{2n-1} \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

d) Exprimer S en fonction de L.

e) Déduire de ce qui précède un développement asymptotique de R_{2n} à la même précision $O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ puis en déduire la nature de la *série* de terme général (R_n).

Problème 2

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$

1) Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1).

2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge. Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant (P_1).

3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

   a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une limite.

   b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel N, la relation d'intégration par partie discrète suivante :
   $$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1})\, U_n + a_N U_N.$$
   En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie (P_2).

4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n\varepsilon_n$ diverge (autrement dit, pour toute série à terme positif divergente, on va construire une série divergente qui diverge plus lentement !).

   Pour cela on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit :

   — $p_0 = 0, \varepsilon_0 = 1, A_0 = a_0$

   — Pour $n \geqslant 1$: $\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} & \text{si } A_{n-1} \geqslant p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$

   Dans tous les cas : $A_n = A_{n-1} + a_n\varepsilon_n$.

   a) Ecrire une fonction Python : `pAe(a : function, n : integer)-> tuple` qui :
   - prend en argument une fonction `a` codant la suite (a_n) (i.e. telle que $a(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et un entier n,
   - renvoie le tuple `p,A,epsi` où `p` = $[\mathtt{p}_0, \ldots, \mathtt{p}_n]$, `A` = $[\mathtt{A}_0, \ldots, \mathtt{A}_n]$, `epsi` = $[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n]$.

   b) Démontrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que : $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

   En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ strictement croissante d'entiers par :
   $$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbf{N} / n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} & \text{pour } k \geqslant 0 \end{cases}$$

   c) Que valent p_{n_k} et ε_{n_k} pour tout entier $k \in \mathbf{N}$?

   d) Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ diverge.

5) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tendant vers 0 , la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

   a) Prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

   b) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

6) Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.

   a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   b) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$.

   c) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

   d) Caractériser les suites vérifiant (P_2).