D.M. 4 MP : réductions simultanées

Pour le lundi 12 octobre

Q 0) On va démontrer le résultat admis à la Q0 du DS 1. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension $n \geqslant 1$ et $\zeta = e^{2i\pi/n}$. On considère deux endomorphismes $u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant les relations $u^n = v^n = \mathrm{id}_E$ et $u \circ v = \zeta.(v \circ u)$,

a) Montrer que u est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U}_n$.

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Montrer $\zeta\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

c) En déduire $1 \in \mathrm{Sp}(u)$. On peut donc trouver $x_0 \in E$ non nul tel que $u(x_0) = x_0$.

d) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le vecteur $v^k(x_0)$ est un vecteur propre pour u, associé à la valeur propre ζ^k.

e) Conclure pour la question 0 du DS1.

Dans la question précédente, ce qui reliait u et v était : $u \circ v = \zeta.(v \circ u)$. On va voir d'autres exemples de réductions simultanées suivant les relations entre $u \circ v$ et $v \circ u$, en commençant par le cas le plus simple où u et v commutent.

La diagonalisation simultanée

Q 1) Diagonalisation simultanée d'une famille d'endormorphismes qui commutent ex 12 pl. R2

Q 2) Un exercice d'application : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dim. finie. Soit $f \in GL(E)$ diagonalisable. Soient $(g, h) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$, $h \circ f = g$. Montrer que f, g, h sont diagonalisables dans une même base.

Q 3) Une sorte de réciproque en dimension 2 :

a) Soient A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et qui commutent. Montrer que $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) (Plus difficile) Soient A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A + \lambda B$ soit diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que A et B commutent. *Indication – S'il existe un t tel que $A + tB$ ait une seule valeur propre dans $\mathbb{C}$, c'est facile. On examinera le cas où pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A + tB$ a deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$, ce qui a des conséquences fortes en voyant le discriminant de χ_{A+tB} comme un polynôme en t.*

La trigonalisation simultanée

Définition Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit une matrice triangulaire supérieure.

Thme admis ici, cf. chapitre R3 si E est un K-e.v., $f \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable ssi f admet un polynôme annulateur scindé.

Q 4) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie, soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque, même infinie, d'endomorphismes trigonalisables de E qui commutent entre eux deux à deux. On veut montrer qu'ils sont tous trigonalisables dans la même base.

Pour cela, on procède par récurrence forte sur la dimension n de E, l'initialisation pour $n = 1$ étant triviale. On suppose donc que pour un $n \geq 1$ on a démontré la propriété dans les e.v. de dim. $\leq n$ et on considère un $\mathbb{C}$-e.v. E de dim. $n+1$ et $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque, même infinie, d'endomorphismes de E qui commutent entre eux deux à deux.

Comme à la Q1, on peut supposer qu'au moins un endomorphisme f_{i_0} n'est pas une homothétie. On fixe F un s.e.v. propre de f_{i_0} et G un supplémentaire de F dans E. Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ une base de E obtenue à partir d'une base de F et d'une base de G.

a) Justifier que pour tout $i \in I$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i) = \begin{pmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}$.

b) Justifier que pour tout i, j, $A_i A_j = A_j A_i$ et $B_i B_j = B_j B_i$.

c) En déduire le résultat demandé.

D'autres hypothèses autre que la commutation :

Définition : Si E est un K-e.v. et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ on note $[u,v] := u \circ v - v \circ u$. De même si A, B sont deux matrices,$[A,B] = AB - BA$.

Cas des sl_2-triplets dans $M_n(\mathbb{C})$

Q 5) On considère trois endomorphismes X, Y, H de $E = \mathbb{C}^n$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- P_1 : $[H,X] = 2X$, $[H,Y] = -2Y$, $[X,Y] = H$.
- P_2 : les seuls s.e.v. de $\mathbb{C}^n$ stables simultanément par X, Y et H sont les s.e.v. triviaux.

Le but est ici de trouver une réduction simultanée pour les endomorphismes X, Y, H.

a) Soit $v \in E$ un vecteur propre pour H pour une valeur propre α. Montrer que $Y(v)$, s'il est non nul, est aussi propre pour H, pour une valeur propre à préciser. En itérant ce procédé, montrer qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $Y^k(v) = 0$ et donc qu'en particulier $\ker Y \neq \{0\}$.

b) Démontrer que le noyau de Y est stable par H.

c) On considère v un vecteur de $\ker Y$ propre pour H (pourquoi existe-t-il ?) et on note $-\lambda$ la valeur propre associée.

Démontrer que les itérés $X^k(v)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ forment une base de vecteurs propres pour H, dont on précisera les valeurs propres associées.

Indication – Ne pas oublier la propriété P_2 de l'énoncé.

d) Ecrire les matrices des applications X, H, Y dans la base précédente indexée suivant les puissances décroissantes $(X^{n-1}(v), \ldots, X(v), v)$: on notera ces matrices X_n, H, n, Y_n. Trouver la valeur explicite du λ du c).

e) Montrer que ces matrices X_n et Y_n sont semblables.

Approfondissement sur la condition $[H,X] = 2X$ de la question précédente :

Q 6) Dans la question précédente, avec l'hypothèse $[H,X] = 2X$, on a montré que X était nilpotent. Ici, on va montrer le résultat plus général suivant : si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sont telles que $[A,B]$ commute avec A, alors $[A,B]$ est nilpotente. La preuve est formée des deux étapes suivantes :

a) *Après le cours du R3.* Montrer que si $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie que $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ alors M est nilpotente.

b) Montrer par récurrence que $M = [A,B]$ vérifie $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Application dans le cadre des algèbres de Lie :

Définition : une sous-algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de $M_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ stable par le crochet de Lie : $\forall A, B \in \mathcal{G}, [A,B] \in \mathcal{G}$. On va montrer ici le

Théorème : soit $\mathcal{G}$ une sous-algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont diagonalisables. Alors les éléments de $\mathcal{G}$ commutent entre eux deux-à-deux et donc sont simultanément dz.

Q 7) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que l'application dite *application adjointe* $ad(A)$: $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto [A,M]$ est diagonalisable.

Q 8) soit $\mathcal{G}$ une sous-algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont diagonalisables et $A \in \mathcal{G}$. On note encore ici $ad(A) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $M \mapsto [A,M]$.

a) Justifier que $ad(A)$ est encore diagonalisable.

b) On décompose $\mathcal{G}$ comme somme directe des sous-espaces propres de $ad(A)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{G} = E_0(ad(A)) \oplus \oplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}(ad(A))$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les valeurs propres non nulles éventuelles de $ad(A)$. Montrer que si $M \in E_{\lambda_i}(ad(A))$ alors M est nilpotente.

c) Conclure la démonstration du théorème.