# D.M. 4 MP : solution

**Q 0)** a) Comme $u^n = \mathrm{id}$, on sait que $P = X^n - 1$ annule $u$ et comme dans $\mathbb{C}[X]$, $P$ scindé à racines simples avec pour ensemble de zéro $Z(P) = \mathbb{U}_n$, on en déduit que $u$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U}_n$.

b) Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Alors $u(v(x)) = \zeta v(u(x)) = \zeta v(\lambda x) = \zeta\lambda v(x)$.
Comme $v^n = \mathrm{id}$, on sait que $\ker(v) = \{0\}$ donc $v(x) \neq 0$ et $v(x)$ est donc vecteur propre de $u$ pour la valeur propre $\zeta\lambda$.

c) Par a) les valeurs propres de $u$ sont dans $\mathbb{U}_n$. Donc si on fixe un $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on peut l'écrire $\lambda = \zeta^k$ avec $k \in [\![0, n-1$. Par la question précédente, on en déduit que $\zeta^{k+1} \in \mathrm{Sp}(u)$ et par récurrence immédiate pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\zeta^{k+i} \in \mathrm{Sp}(u)$ en particulier $\zeta^n \in \mathrm{Sp}(u)$ autrement dit $1 \in \mathrm{Sp}(u)$.

d) Il suffit de ependre le résultat du b) avec $\lambda = 1$ : $v(x_0)$ est vecteur propre de $u$ pour la v.p. $\zeta.1 = \zeta$ et récurrence immédiate.

e) On se place dans la base $(x_0, v(x_0), \ldots, v^{n-1}(x_0))$ base de vecteurs propres de $u$ associées à $n$ valeurs propres distinctes $1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1}$. Et par déf. de la représentation matricielle, on a la représentation voulue.

**Q 1)**

**Q 2)** *Indication possible* – Montrer que $f^5 = f$.

On notera (1),(2),(3) les trois égalités de l'énoncé. L'hyp. est complètement "circulaire" pour $f, g, h$. (2) et (1) donnent $g \circ f \circ g = f \quad (4)$. (et donc aussi $h \circ g \circ h = g$ par permutation des variables...)

(2) donne aussi $f^2 = g \circ h \circ f = g^2$ par (3). On retient $f^2 = g^2$ (5).

Mais alors avec (4) $f = g \circ f \circ g = g(g \circ f \circ g) \circ g = g^2 f g^2 = f^5$ par (5)

Comme $f$ est inversible $f = f^5$ donne $f^4 = id$. Donc les v.p. de $f$ qui sont toutes réelles sont des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda^4 = 1$ donc $\lambda = \pm 1$.

Mais $f^2$ est diagonalisable et admet 1 comme seule v.p. donc $f^2 = \mathrm{id}$. Donc $f$ est une symétrie. De même pour $g$ et $h$.

Mais alors l'égalité (4) $g \circ f \circ g = f$ devient, comme $g = g^{-1}$ que $g \circ f = g \circ f$, donc $f$ et $g$ commmutent donc diagonal. simul. . □

**Q 3)** a) Immédiat car $A = PD_1P^{-1}$ et $B = PD_2P^{-1}$ avec la même matrice $P$ et $D_1, D_2$ diagonales donc $A + tB = P(D_1 + tD_2)P^{-1}$ avec $P$ diagonale.

b) (i) Supposons qu'il existe un $s \in \mathbb{C}$ tel que $A + sB$ ait une seule valeur propre. Comme il est diagonalisable, c'est une matrice scalaire i.e. de la forme $\lambda I$.

Alors $A = \lambda I - sB$ et $A$ et $B$ commutent.

(ii) Supposons maintenant que pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A + tB$ ait deux valeurs propres distinctes.

Cela signifie que le discriminant de $\chi_{A+tB}$ n'est jamais nul.

Pour simplifier notons $\chi_t$ pour $\chi_{A+tB}$. On sait que $\chi_t = X^2 - \mathrm{Tr}(A + tB)X + \det(A + tB)$ et son discriminant $\Delta_t$ s'exprime donc comme : $(\mathrm{Tr}(A + tB))^2 - 4\det(A + tB)$.

C'est un polynôme en la variable $t$. S'il n'est pas constant, le théorème de d'Alembert-Gauss entraîne qu'il admet une racine, ce qui est exclu ici par hyp.

Donc $\Delta_t$ est constant. Or $(\mathrm{Tr}(A + tB))^2 = \mathrm{Tr}(B)^2t^2 + 2\,\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)t + Tr(A)^2 \quad (1)$.

**Micro-lemme** : $\det(A + tB)$ est aussi, comme il s'agit de matrices $2 \times 2$, un polynôme de degré au plus deux en $t$ et de monôme en $t^2$ : $\det(B)t^2$.

**Preuve du micro-lemme** : : deux raisons à cela :

• Raison 1 : dans la formule de développement du déterminant pour avoir du $t^2$, on ne doit à chaque fois, pour les entrée $a_{i,j} + tb_{i,j}$ choisir le terme $tb_{i,j}$ et donc le résultat est exactement le calcul de $\det(B)$.

• Raison 2 : en prenant $t = 0$, on voit que le terme constant est $\det(A)$. En factorisant par $t$ dans le déterminant, on exhibe le "polynôme aux inverses" : $\det(t(\frac{1}{t}A+B) = t^2\det(1/tA+B) = t^2Q(1/t)$ où $Q(u) = \det(uA + B)$.

Alors $Q(u) = \alpha u^2 + \beta u + \det(B)$ et $t^2 Q(1/t) = \det(B)t^2 + \beta t + \alpha$. □

Donc par (1) et le $\mu$-lemme, le monôme en $t^2$ dans l'expression de $\Delta_t$ est $(\mathrm{Tr}(B)^2 - 4\det(B))$.
Si $\Delta_t$ est constant, ce monôme est nul, c'est-à-dire le discriminant du polynôme caractéristique de $B$ est nul donc $B$ admet une seule valeur propre.
Or $B$ est dz donc $B = \lambda I$ et $B$ commute à $A$.

**Q 4)** a) C'est juste que le s.e.v. $F$ propre pour $f_{i_0}$ est stable par tous les $f_i$.
b) Calcul matriciel par bloc déduit de $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$.
c) On regarde les $(f_i)_{|F}$ de matrices $A_i$ dans $\mathcal{B}_F$. On vient de montrer qu'ils commutent entre eux, ils sont toujours tz par restriction (avec les polynômes annulateurs) donc on a bien une base $\mathcal{B}'_F$ de $F$ qui les tz simultanément par H.R. forte.
On regarde les $(p_G \circ f_i)_{|G}$ de matrices $B_i$. Là encore, ils commutent entre eux, donc on a bien une base $\mathcal{B}'_G$ de $G$ qui les tz simultanément par H.R. forte.
Alors dans $(\mathcal{B}_{F'}, \mathcal{B}_{G'})$ on a simultanément trigonalisé tous les $f_i$.

**Q 5)** a) $HY(v) - YH(v) = -2Y(v) \Leftrightarrow HY(v) = (\alpha - 2)Y(v)$. Donc $Y(v)$ s'il est non nul, est propre pour la v.p. $\alpha - 2$. Mais alors de même $HY^k(v) = (\alpha - 2k)Y^k(v)$ si tous les $Y^k(v)$ étaient non nuls, on aurait une infinité de valeurs propres distinctes, ce qui est exclu.
Donc il existe un $k$ tel que $v \in \ker Y^k$ donc $\ker Y^k \neq \{0\}$ et donc $\ker Y \neq \{0\}$ (car si $Y$ injective, tous les $Y^k$ le seraient aussi).
b) Si $v \in \ker Y$ on veut montrer que $H(v) \in \ker Y$.
Or on a $HY(v) - YH(v) = -2Y(v)$, donc $YH(v) = HY(v) + 2Y(v) = 0 + 0$.
c) Le même calcul qu'au a) avec $X$ à la place de $Y$ donne : $X(v)$ s'il est non nul, est propre pour $-\lambda + 2$ et $X^k(v)$ s'il est non nul, propre pour $-\lambda + 2k$.
Mais si on considère le plus grand entier $k_0$ tel que $X^{k_0}(v) \neq 0$ (cet entier est inférieur ou égal à $n-1$ cf. a)), alors $F = \mathrm{Vect}(v, X(v), \ldots, X^{k_0}(v))$ est un s.e.v. de $E$, stable par $X$ de manière évidente, par $H$ puisque chaque vecteur est propre pour $H$, reste seulement à vérifier qu'il est stable par $Y$, pour conclure via la prop. $P_2$ que c'est $E$ entier, donc que $k_0 = n-1$ et que $H$ est diagonalisable.
Pour vérifier que $F$ est stable par $Y$, on doit considérer les $YX^k(v)$, sachant que pour $k = 0$, $Y(v) = 0$ puisque $v \in \ker Y$.
Or pour $k \geq 1$, $YX^k(v) = YX(X^{k-1}v) = XY(X^{k-1}v) - HX^{k-1}(v) = XY(X^{k-1}(v)) - \lambda_{k-1}X^{k-1}(v)$ $(*)$
Si donc on suppose comme hypothèse de récurrence que $YX^{k-1}(v)$ est colinéaire à $X^{k-2}(v)$ alors l'égalité $(*)$ permet de transmettre la récurrence et de montrer que $YX^k(v)$ est à son tour colinéaire à $X^{k-1}(v)$ □
Précisément : on note $H(k) : \exists\, \mu_k \in \mathbb{K}, YX^k(v) = \mu_k X^{k-1}(v)$.
• Initialisation : on veut montrer $H(1)$ $\exists\, \mu_1 \in \mathbb{K}, YX(v) = \mu_1 v$.
Or $XY - YX = H$ donc $YX = XY - H$ et $YX(v) = XY(v) - H(v) = 0 + \lambda v$ puisque $v$ est dans $\ker Y$ et $v$ est propre pour $H$ pour la v.p. $-\lambda$. Donc $H(1)$ est vraie avec $\mu_1 = \lambda$
• Hérédité : on suppose $H(k-1)$ vraie pour un $k \in [\![2, k_0]\!]$ on veut montrer que $H(k)$ est vraie. Or pour $k \geq 1$,

$$YX^k(v) = YX(X^{k-1}v) = X(YX^{k-1}v) - HX^{k-1}(v) = X(\mu_{k-1}X^{k-2}(v)) - \lambda_{k-1}X^{k-1}(v) \quad (*)$$

où on a utilisé $H(k-1)$ et le fait que $X^{k-1}(v)$ est propre pour $H$. Avec $(*)$ on a donc bien :

$$YX^k(v) = (\mu_{k-1} - \lambda_{k-1})X^{k-1}(v)$$

ce qui montre bien $H(k)$.
La récurrence est établie.
Ainsi $F$ est stable par $X, Y, H$ donc par $P_2$, $F = E$.
d) Par ce qui précède $H$ est diagonal dans $\mathcal{B} = (X^{n-1}(v)), \ldots, X(v), v)$,avec

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(H) = \mathrm{diag}(-\lambda + 2(n-1), \ldots, -\lambda + 2, -\lambda)$$

On note $HX^k(v) = \lambda_k X^k(v)$ avec $\lambda_k = -\lambda + 2k$ pour $k = 0, \ldots, n-1$.

En outre, comme $H = [X, Y]$, on sait que $\mathrm{Tr}(H) = 0$.
Donc $-n\lambda + 2 + 4 + \cdots + 2(n-1) = 0 \Leftrightarrow -n\lambda + n(n-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = n-1$.
Finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(H) = \mathrm{diag}((n-1), (n-3), \ldots, -(n-3), -(n-1)))$$

La matrice de $X$ est par déf. de la base $\mathcal{B}$ un bloc de Jordan de taille $n$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reste à déterminer celle de $Y$ mais c'est ce qu'on a fait au d) : on a vu avec $H(k)$ que : $Y(v) = 0$ et que pour tout $k \geq 1$, $YX^k(v) = \mu_k X^{k-1}(v)$ où $\mu_1 = \lambda = n-1$ et pour tout $k \geq 1$, $\mu_k = \mu_{k-1} - \lambda_{k-1}$ où $\lambda_k = -\lambda + 2k = -n + 1 + 2k$.
Donc $\mu_2 = \mu_1 - \lambda_1 = n - 1 + n - 1 - 2 = 2n - 4 = 2(n-2)$ on montre par réc. que $\mu_k = k(n-k)$
On en conclut que $Y$ s'écrit dans cette base

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 1.(n-1) & 0 & & & & & \\ & 2(n-2) & 0 & & & & \\ & & 3(n-3) & 0 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & (n-1).1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Q 6)** a) Si, *par l'absurde*, on a comme valeurs propres *non nulles* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, deux à deux distinctes de multiplicités algébriques (i.e. dans le polynôme caract.) $n_1, \ldots, n_r$.
Alors, en trigonalisant, $\mathrm{Tr}(A^k) = n_1\lambda_1^k + \cdots +, n_r\lambda_r^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (ceci est donné par la décomposition en s.e.v. caractéristique).
On obtient alors que $n_1, \ldots, n_r$ vérifient le système :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \ldots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \ldots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or le déterminant de ce système est $\lambda_1 \ldots \lambda_r Vdm(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, qui est non nul, ce qui entraîne que les multiplicités $n_i$ sont nulles, *contradiction.*
b) On a $\mathrm{Tr}([A,B]^{k+1}) = \mathrm{Tr}((AB - BA)[A,B]^k) = \mathrm{Tr}(AB[A,B]^k) - \mathrm{Tr}(BA[A,B]^k) \quad (*)$.
Mais $A$ commute avec $[A,B]$ donc avec $[A,B]^k$ et donc $BA[A,B]^k = B[A,B]^k A \quad (1)$.
Puis par propriété de la trace : $\mathrm{Tr}(B[A,B]^k A) = \mathrm{Tr}([A,B]^k AB) \quad (2)$. Donc (1) et (2) montrent que les deux termes dans $(*)$ sont égaux. □

**Q 7)**

**Q 8)** a) $ad(A) :: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est dz comme restriction d'un endomorphisme dz à un sev stable, prop de cours, qui se démontre immédiatement en considérant qu'un polynôme annulateur SARS de $ad(A) : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ annule encore sa restriction.
b) $M \in E_{\lambda_i}(ad(A)) \Leftrightarrow [A, M] = \lambda M$.
Mais alors $M$ commute avec $[A, M]$ et par la Q6) on en déduit que $[A, M]$ est nilpotente et donc ici puisque c'est $\lambda M$ et $\lambda \neq 0$, que $M$ est nilpotente.
Mais comme $M \in \mathcal{G}$ on sait que $M$ est diagonalisable, et une matrice dz et nilpotente est nulle.
Donc $\mathcal{G} = E_0(ad(A))$ autrement dit toutes les matrices de $\mathcal{G}$ commutent à $A$ et cela pour toutes les matrices $A$ de $\mathcal{G}$.
Donc toutes les matrices de $\mathcal{G}$ commutent entre elles et on conclut avec la Q1.