D.M. 3 : une solution

Centrale MP/MPI 2023 Maths 1

Dans ce corrigé la composée d' endomorphismes U et V est notée parfois $U \circ V$, parfois UV. De même U évalué en un vecteur p sera écrit parfois $U(p)$, parfois Up.

N.B. Ce sont les notations du collègue qui a écrit ce corrigé, mais pour vous à l'écrit écrire $U \circ V$ et $U(p)$.

(1) Soit $a \in \mathbb{K}$. On vérifie aisément que

$$\forall p, q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, E_a(\alpha p+\beta q) = (\alpha p+\beta q)(X+a) = \alpha p(X+a)+\beta q(X+a) = \alpha E_a(p)+\beta E_a(q).$$

De plus $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = I$ donc E_a est bijective.

(2) • J est linéaire par linéarité de l'intégrale. - Pour vérifier que $\mathbb{R}[X]$ est stable par J il suffit alors de vérifier que pour $k \in \mathbb{N}, J\left(X^k\right) \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$J\left(X^k\right) = \int_X^{X+1} t^k \, \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\left((X+1)^{k+1} - X^{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}X^i \in \mathbb{R}[X].$$

(3) L'expression ci-dessus montre que $\deg\left(J\left(X^k\right)\right) = k$. Soit $p \in \mathbb{R}[X]$ de degré d, qu'on peut écrire $p = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. On a

$$Jp = \underbrace{a_d J\left(X^d\right)}_{\text{de degré } d} + \underbrace{\sum_{k=0}^{d-1} a_k J\left(X^k\right)}_{\text{de degré } \leq d-1}.$$

Ainsi $\deg(Jp) = d$. - Injectivité. En particulier pour $p \in \mathbb{R}[X]$ on a l'implication :

$$Jp = 0 \Rightarrow \deg(Jp) = -1 \Rightarrow \deg(p) = -1 \Rightarrow p = 0.$$

Donc $\mathrm{Ker}(J) = \{0\}$ et donc J est injective. - Surjectivité. Soit $p \in \mathbb{R}[X]$. Posons $d = \deg(p)$.$\mathbb{R}_d[X]$ est stable par J, et l'endo J_d induit par J sur $\mathbb{R}_d[X]$ est injectif (car $\mathrm{Ker}\,(J_d) = \mathrm{Ker}(J) \cap \mathbb{R}_d[X] = \{0\}$), donc bijectif car $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension finie, donc il existe $q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $J_d(q) = J(q) = p$.

(4) Classique ! Montrons par récurrence que pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathscr{P}(k) : \ll \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \, \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } k! \gg .$$

Pour $k = 0$, c'est du cours : $\int_0^{+\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1$. On suppose $\mathscr{P}(k)$ pour un $k \in \mathbb{N}$. Alors l'intégration par parties suivante, justifiée par l'existence de limites finies dans le crochet, montre que $\int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} \, \mathrm{d}t = \underbrace{\left[-t^{k+1} e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0 \text{ par c.c.}} + \int_0^{+\infty} (k+1) t^k e^{-t} \, \mathrm{d}t = (k+1)k! = (k+1)!.$$

(5) On vérifie aisément que L est linéaire, par linéarité de la dérivation et de l'intégrale.

Pour vérifier que $\mathbb{K}[X]$ est stable par L il suffit de vérifier que pour $k \in \mathbb{N}, L\left(X^k\right) \in \mathbb{K}[X]$. On

a :

$$\begin{aligned}
L\left(X^k\right) &= -\int_0^{+\infty} e^{-t}k(X+t)^{k-1}\,\mathrm{d}t \\
&= -k\sum_{i=0}^{k-1}\int_0^{+\infty}\binom{k-1}{i}e^{-t}t^i X^{k-1-i}\,\mathrm{d}t \\
&= -k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}i!X^{k-1-i} \\
&= -k!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(k-1-i)!}X^{k-1-i} \\
&= -k!\sum_{j=0}^{k-1}\frac{X^j}{j!} \qquad \text{(changement d'indice).}
\end{aligned}$$

Donc on a bien $L\left(X^k\right) \in \mathbb{K}[X]$. L n'est pas inversible : en effet $L(1) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$.

(6) - $\forall a \in \mathbb{K}, E_a \circ I = I \circ E_a = E_a$. De plus $I(X) = X \notin \mathbb{K}^*$ donc I n'est pas un endomorphisme delta.

- $\forall a \in \mathbb{K}, \forall p \in \mathbb{K}[X], D\circ E_a(p) = (p(X+a))' = p'(X+a) = E_a\circ D(p)$. De plus $D(X) = 1 \in \mathbb{K}^*$ donc D est un endomorphisme delta.
- $\forall a \in \mathbb{K}, E_a \circ E_a = E_a \circ E_a$. De plus $E_a(X) = X + a \notin \mathbb{K}^*$ donc E_a n'est pas un endomorphisme delta.
- $\forall a \in \mathbb{K}, \forall p \in \mathbb{K}[X], J \circ E_a(p) = \int_X^{X+1} p(t+a)\mathrm{d}t \underset{u=\bar{t}+a}{=} \int_{X+a}^{X+a+1} p(u)\mathrm{d}u = E_a \circ J(p)$. De plus $J(X) = \frac{1}{2}\left((X+1)^2 - X^2\right) = X + \frac{1}{2} \notin \mathbb{K}^*$ donc J n'est pas un endomorphisme delta.
- $\forall a \in \mathbb{K}, \forall p \in \mathbb{K}[X], L \circ E_a(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}p'((X+a)+t)\mathrm{d}t = E_a \circ L(p)$. De plus $L(X) = -1 \in \mathbb{K}^*$ donc L est un endomorphisme delta.

(7) Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ invariant par translations. Vérifions que $(\mathscr{S}, +, \cdot, \circ)$ est une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(\mathbb{K}[X]), +, \cdot, \circ)$:

- mq $\mathscr{S}$ est stable par combinaison linéaire : pour $T_1, T_2 \in \mathscr{S}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :

$$E_a \circ (\alpha T_A + \beta T_2) = \alpha E_a \circ T_A + \beta E_a \circ T_2 = \alpha T_A \circ E_a + \beta T_2 \circ E_a = (\alpha T_A + \beta T_2) \circ E_a.$$

- mq $\mathscr{S}$ est stable par $\circ$: pour $T_1, T_2 \in \mathscr{S}$, on a :

$$E_a \circ (T_1 \circ T_2) = T_1 \circ E_a \circ T_2 = (T_1 \circ T_2) \circ E_a.$$

- Enfin $I \in \mathscr{S}$ d'après (6).

L'ensemble des endomorphismes delta n'est pas stable par $+$ ni par $\circ$, parce que par exemple $D + (-D)$ et $D \circ D$ ne sont pas des endomorphismes delta. En effet $(D - D)(X) = 0 \notin \mathbb{K}^*$ et $(D \circ D)(X) = 0 \notin \mathbb{K}^*$.

Noter (même si cela n'est pas nécessaire ici) que la composée de deux endomorphismes Δ n'est pas non plus un endomorphisme Δ : par exemple L et D sont des endomorphismes Δ, mais $D(L(X)) = D(-1) = 0$.

(8) Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ et d son degré. On a $D^k p = 0$ pour $k > d$ donc la somme de l'énoncé est une somme finie donc bien définie, et de plus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k p = \sum_{k=0}^{d} a_k D^k p$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ en tant que somme de polynômes.

(9) Notons encore d le degré d'un polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k\right) \circ E_a\right) p = \sum_{k=0}^{d} a_k D^k(p(X+a)) = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k p^{(k)}\right)(X+a) = \left(E_a \circ \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k\right)\right) p$$

(10) Supposons $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$. Évaluée en $p = X^n$ pour n donné, cette égalité donne

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\left(X^n\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k D^k\left(X^n\right).$$

Comme chaque terme $D^k\left(X^n\right)$ est un monôme de degré $n-k$, le coefficient constant dans cette égalité donne $n!a_n = n!b_n$ donc $a_n = b_n$.

(11) L'implication $\Leftarrow$ est immédiate car nous avons vu en (9) que tout endomorphisme de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ est invariant par translation. Réciproquement, supposons T invariant par translation. Pour montrer l'égalité voulue il suffit de montrer qu'elle a lieu pour tous les vecteurs de la famille $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car celle-ci forme une base de $\mathbb{K}[X]$. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $Q_n = T(q_n)$. On a pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q_n(X+a) &= T(q_n)(X+a) \\ &= T(q_n(X+a)) \quad \text{par invariance par translation} \\ &= T\left(\frac{(X+a)^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} a^{n-k} T\left(X^k\right) \quad \text{(binôme de Newton et linéarité)} \end{aligned}$$

En remarquant que $D^k q_n = q_{n-k}$ on obtient donc

$$Q_n(X+a) = \sum_{k=0}^{n} D^k q_n(a) T q_k.$$

En particulier en évaluant en 0 on obtient :

$$Q_n(a) = \sum_{k=0}^{n} T q_k(0) D^k q_n(a).$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a donc bien :

$$Q_n = T q_n = \sum_{k=0}^{n} T q_k(0) D^k q_n = \sum_{k=0}^{\infty} T q_k(0) D^k q_n.$$

(12) Deux endomorphismes invariants par translation sont d'après ce qui précède nécessairement de la forme $T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ et $T_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k$, avec (a_k) et (b_k) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On a alors « formellement »

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) D^n$$

mais attention ce calcul sur des sommes infinies n'a pas de sens !

Une vraie preuve demande d'évaluer ces objets sur des polynômes pour faire apparaître des sommes finies.

(13) Le résultat de (11) appliqué à $T = E_a$ donne pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$:

$$p(X+a) = E_a p = \sum_{k=0}^{\deg(p)} E_a q_k(0) D^k p = \sum_{k=0}^{\deg(p)} q_k(a) p^{(k)} = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}.$$

On reconnaît la formule de Taylor pour les polynômes.

(14) On applique (11) à $T = J$. On a $J q_k(0) = \int_0^1 \frac{t^k}{k!} \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(k+1)!}$, donc pour $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$Jp = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{1}{(k+1)!} p^{(k)}$$

(15) • $(D - I)$ est bien inversible car pour $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$(D-I) \circ \left(-\sum_{k=0}^{\infty} D^k \right) p = \sum_{k=0}^{\infty} D^k p - \sum_{k=1}^{\infty} D^k p = p.$$

les sommes considérées étant toutes finies. Et de même avec $\left(-\sum_{k=0}^{\infty} D^k\right) \circ (D - I)$.

(En fait $\mathbb{K}[D]$ est une algèbre commutative).

N.B C'est une idée présente partout : celle d'une généralisation tous azimut de la formule $1/(1-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, notamment dans le monde des opérateurs.

- On procède comme dans les questions précédentes avec $T = L$. On a $Tq_0 = 0$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$Lq_k(0) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}t = -1, \quad \text{d'après (4).}$$

Ainsi la question (11) donne pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$Lp = -\sum_{k=1}^{\deg(p)} D^k p.$$

Soit $p \in \mathbb{K}[X]$, de degré d. On remarque que

$$\begin{aligned} L \circ (D-I)p = L(p') - L(p) &= -\sum_{k=1}^{d-1} D^k p' + \sum_{k=1}^{d} D^k p \\ &= -\sum_{k=1}^{d-1} p^{(k+1)} + \sum_{k=1}^{d} p^{(k)} \\ &= -\sum_{k=2}^{d} p^{(k)} + \sum_{k=1}^{d} p^{(k)} = p^{(1)} = Dp. \end{aligned}$$

D'où $L \circ (D-I) = D$, et donc sachant que ($D-I$) soit inversible on a $L = (D-I)^{-1} \circ D$.

(16) On pose $n(T) = \min\{k \in \mathbb{N} : Tq_k(0) \neq 0\}$. Alors pour $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré d,

$$Tp = \sum_{k=n(T)}^{\infty} Tq_k(0)p^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{si } d < n(T) \\ \sum_{k=n(T)}^{d} Tq_k(0)p^{(k)}, & \text{si } d \geq n(T). \end{cases}$$

Ainsi

$$\deg(Tp) = \begin{cases} -1, & \text{si } d - n(T) \leq -1 \\ d - n(T), & \text{si } d - n(T) > -1 \end{cases}$$

d'où la conclusion voulue.

(17) $\mathrm{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{K}[X] : \deg(Tp) = -1\} = \mathbb{K}_{n(T)-1}[X]$ d'après la question précédente.

(18) • Supposons (i) et montrons (ii). T étant inversible on a $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ donc $1 \notin \mathrm{Ker}(T)$, et donc $T1 \neq 0$. - Supposons (ii) et montrons (iii). On a $T1 = \sum_{k=0}^{\deg(1)} Tq_k(0)D^k 1 = Tq_0(0).1 \neq 0$, donc $Tq_0(0) \neq 0$, et donc $n(T) = 0$. La question (16) donne alors $\forall p \in \mathbb{K}[X], \deg(Tp) = \deg(p)$. - Supposons (iii) et montrons (i). L'hypothèse donne immédiatement $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$: pour $p \neq 0$, on a $\deg(Tp) = \deg(p) \neq -1$ donc $Tp \neq 0$. Il reste à montrer que T est surjectif. Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré d.$\mathbb{K}_d[X]$ est stable par T d'après (16), et l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{K}_d[X]$ est injectif donc bijectif (car $\mathbb{K}_d[X]$ de dim finie), donc il existe $q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Tq = p$.

(19) Supposons T inversible. Pour $a \in \mathbb{K}, E_a$ est également inversible avec $E_a^{-1} = E_{-a}$. On a donc $(E_a \circ T)^{-1} = (T \circ E_a)^{-1}$, autrement dit $T \circ E_{-a} = E_{-a} \circ T$. En remplaçant a par - a on obtient bien la conclusion voulue.

(20) Par (11), comme T est invariant par translation, on sait que T est de la forme $T = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k D^k$ avec $\alpha_k = Tq_k(0)$. Cette égalité donne $TX = \alpha_0 X + \alpha_1$, et l'hypothèse supplémentaire « endomorphisme delta » dit que $TX \in \mathbb{K}^*$ ce qui donne $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

(21) • Existence : par la question précédente, on sait que $T = D \circ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k D^{k-1}\right)$, d'où l'égalité $T = D \circ U$ avec $U = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} D^k$ (U est bien invariant par translation d'après (9)).

• Unicité. Soient $U = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k D^k$ et $V = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k D^k$ deux endomorphismes invariant par translations (U et V sont nécessairement de cette forme avec (α_k) et (β_k) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, d'après (11)). On suppose que $T = D \circ U = D \circ V$ et on va montrer que $U = V$. On a $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k-1} D^k = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k-1} D^k$. D'après (10) on en déduit : $\forall k \geq 1, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_k = \beta_k$, donc $U = V$.

- Exemple 1. Si $T = D$, c'est immédiat : $T = D \circ I$ donc $U = I$.

- Exemple 2. Si $T = L$, par définition de L on a $L = \Phi \circ D$ où U est défini par $\Phi p(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t} p(x+t)\mathrm{d}t$.$\Phi$ est invariant par translation et par la question 12, Φ et D commutent, donc $L = D \circ \Phi$ et donc $U = \Phi$.

(22) p est non nul donc $\deg(p) \geq 0$. Comme ici $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$, on a $n(T) = 1$, et la question (16) donne donc $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. Ainsi

$$\mathrm{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{K}[X] : \deg(p) = 0 \text{ ou } 1\} = \mathbb{K}_0[X].$$

On a ainsi $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$ donc $0 \in \mathrm{Ker}(T)$. Par ailleurs pour $\lambda \neq 0$ un polynôme p non nul ne peut pas vérifier $Tp = \lambda p$ puisque $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. Donc aucun scalaire λ non nul n'est valeur propre, et finalement $\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$.

(23) Nous avons déjà remarqué que $\mathbb{K}_n[X]$ était stable par T, donc la restriction de T à $\mathbb{K}_n[X]$ définit un endomorphisme T_n de $\mathbb{K}_n[X]$. Si T_n était diagonalisable, dans une base $\mathscr{B}$ de vecteurs propres pour T_n (nécessairement associés à la seul valeur propre 0), on aurait

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

et donc T serait nul, ce qui n'est pas le cas si $n \geq 1$ puisque $TX \neq 0$.

En revanche T_0 est l'application nulle, qui est bien dz.

(24) La question (22) donne $\mathrm{Im}\,(T_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Par ailleurs

$$\mathrm{Ker}\,(T_n) = \mathrm{Ker}(T) \cap \mathbb{K}_n[X] = \mathbb{K}_0[X],$$

donc le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}\,(T_n)) = (n+1) - 1 = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$. Ainsi par inclusion et égalité des dimensions on a $\mathrm{Im}\,(T_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré d. On a $p \in \mathrm{Im}\,(T_{d+1})$ donc il existe $q \in \mathbb{K}_{d+1}[X]$ (et donc dans $\mathbb{K}[X]$) tel que $T_{d+1}(q) = T(q) = p$. Donc T est bien surjective.