

Banque CCINP : pas d'exercice de la banque cette semaine.

Réduction par équivalence

Exercice 1. Justifier que le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

Exercice 2. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe $(P, Q) \in GL_3(\mathbb{R})^2$ telles que $PAQ = J$ et déterminer explicitement de telles matrices P et Q .

Exercice 3. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r . Montrer qu'il existe $A_1, \dots, A_r$ dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$ telles $A = A_1 + \dots + A_r$ avec $\text{rg}(A_k) = 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Exercice 4. Pour tout $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $E_r = \{M \in M_n(\mathbb{K}), \text{rg}(M) \leq r\}$.

Soit $F \subset M_n(\mathbb{K})$ une partie non vide telle que $\forall A \in F, \forall B \in M_n(\mathbb{K}), AB \in F$ et $BA \in F$.

Montrer qu'il existe un $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, tel que $F = E_r$.

Changement de base pour les A.L. et matrices semblables

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels qu'il existe $u \in GL(E)$ tel que $g = u \circ f \circ u^{-1}$.

Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$.

Exercice 6 (La similitude des matrices se montre avec les A.L. associées!). Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, les matrices N_λ et N_1 sont semblables :

$$N_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. a) Si A, B sont dans $M_n(\mathbb{K})$ et A est inversible montrer que AB et BA sont semblables

b) Donner un exemple de matrices A, B dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que AB et BA ne sont pas semblables

Exercice 8 (Le miracle des homothéties et sa contraposée : à savoir comme du cours). a) Soit E un K -e.v. quelconque.

Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie que pour tout $x \in E, f(x)$ et x sont liés alors f est une homothétie.

b) Soit M une matrice qui n'est pas une matrice d'homothétie. Justifier que M est semblable à une matrice A dont la première colonne est E_2 .

Deux résultats de classification complète pour la similitude

Exercice 9 (Classification complète des classes de similitude pour les matrices 2×2). a) Vérifier que si $(A, B) \in M_n(K)^2$ sont semblables alors elles ont même déterminant et même trace.

b) Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$ qui n'est pas de la forme $A = \lambda I_2$. Montrer qu'il existe $X \in M_{n,1}(K)$ tel que (X, AX) libre.

c) Montrer que deux matrices A et B dans $M_2(K)$ qui ne sont pas scalaires sont semblables, si et seulement si, elles ont même trace et même déterminant.

Exercice 10 (Important : Classes de similitude des matrices de rang 1). a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ est semblable à } E_{2,1} \\ \text{ou } \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tel que } A \text{ est semblable à } \lambda E_{1,1}. \end{cases}$

b) Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables si, et seulement si, elles ont même trace.

L'équation aux valeurs propres et la diagonalisabilité

Exercice 11. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Pour quels $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ cette matrice est-elle dz ?

Exercice 12. C.N.S. sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ pour que $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 13. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$. Soit $\varphi : M \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$.

- Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$.
- Déterminer noyau et image de φ .
- Montrer que φ est diagonalisable en considérant l'équation aux valeurs propres.

Exercice 14 (Traduction réelle d'une dz dans $\mathbb{C}$). a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de A . Montrer que $\bar{\lambda}$ est aussi v.p. de A .

b) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}$. Montrer qu'il existe une matrice réelle $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = Q \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} Q^{-1}$.

Indication : comme d'habitude, semblable se montre *géométriquement* i.e. sur l'endomorphisme canoniquement associée, qu'on pourra ici écrire $f : X \mapsto AX$

Exercice 15. Soient $(a, b, c, \alpha) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a \neq b$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = (X - a)(X - b)P' + \alpha(X - c)P$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une CNS sur les coefficients a, b, c, α, n pour que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f .
- En supposant cette condition réalisée, et en notant f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f_n et montrer que f_n est diagonalisable.

Exercice 16 (En dimension infinie). Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = 0\}$ et $T : E \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall f \in E, T(f) : x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt.$$

- Montrer que $T(E) \subset E$, et que T est un endomorphisme de E .
- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T .

Exercice 17 (Gerschgorin-Hadamard H.P. mais bon à savoir.... localisation des v.p.). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de $A = (a_{i,j})$.

- Montrer qu'il existe un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leq L_i$ où $L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$.

- On note de même, pour tout $j = 1, \dots, n$, $C_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{i,j}|$. Enfin, on note $L = \max_{i=1, \dots, n} (L_i + |a_{i,i}|)$ et

$$C = \max_{j=1, \dots, n} (C_j + |a_{j,j}|).$$

Montrer que pour toute valeur propre λ de A , on a $|\lambda| \leq \min(L, C)$.

Exercice 18 (Matrices tridiagonales symétriques). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $A(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$.

Le but de l'exercice est de donner une forme très explicite pour les vecteurs propres et valeurs propres de $A(a, b)$.

- On considère le cas particulier où $(a, b) = (0, 1)$ et on note $A = A(0, 1)$.

(i) Montrer à l'aide de l'exercice 17, que toute valeur propre λ de A est de valeur absolue au plus 2.

(ii) On pose alors $\lambda = 2 \cos(\alpha)$ avec $\alpha \in [0, \pi]$. Exprimer avec cette forme les valeurs propres et vecteurs propres de A .

b) On considère de nouveau $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Dédire du a) la forme explicite des valeurs propres et vecteurs propres de $A(a, b)$.

L'apport du polynôme minimal et des polynômes annulateurs en général

Exercice 19. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. On pose : $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
- On pose $B = 2A - \text{Tr}(A) \cdot I_n$. Calculer $\det B$.

- c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible. Dans ce cas, déterminer B^{-1} .
- d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 20. Redémontrer la diagonalisabilité de l'endomorphisme φ de l'exercice 13 à l'aide d'un polynôme annulateur de φ .

Exercice 21. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $A + \text{Com}(A)^\top = \lambda I_n$ où $\text{Com}(A)$ est la comatrice de A .
Montrer que A a, au plus, deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$.

Exercice 22. Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que si M est diagonalisable alors A et B sont diagonalisables.

Exercice 23. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ définie par bloc par $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Donner une expression des matrices B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- b) Montrer que si A est diagonalisable et inversible alors B est diagonalisable.