

Banque CCINP : 65 1) et 2), 84, 85, 87, 89, 90

Structures

Exercice 1. a) Définir les lois $+$ et $\times$ usuelles dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et les implémenter en Python

b) Montrer que l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ n'est pas intègre.

Exercice 2. Montrer que tout sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$ contient $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 (Approfondissement de l'ex précédent, Mines-Centrale : La notion, H.P. de *caractéristique* d'un corps). Soit $(K, +, \times)$ un corps quelconque.

Soit $\varphi : (\mathbb{Z}, +, \times) \rightarrow (K, +, \times)$ le morphisme d'anneaux qui envoie $1_{\mathbb{Z}}$ sur 1_K .

a) Montrer que φ est bien défini.

b) Montrer que si φ est *injectif* alors on peut prolonger φ en un morphisme injectif de corps de $\mathbb{Q}$ dans K . Justifier qu'on peut dire que K « contient une copie de $\mathbb{Q}$ » et on dit que K est de *caractéristique zéro*.

c) Montrer que si φ n'est pas injectif alors son noyau est de la forme $p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier et qu'on peut définir à partir de φ un morphisme injectif de corps de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans K . Dans ce cas, on dit que K contient une copie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que K est de *caractéristique* p .

Moralité : les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jouent un rôle très particulier, car tout corps contient une copie de l'un de ces corps et c'est le plus petit corps qu'il contient. On les appelle les *corps premiers*.

N.B. Bien que les corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ soient au programme, ce même programme dit que la plupart du temps, les corps considérés seront (sauf mention du contraire) des sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 4. a) Montrer qu'un anneau intègre avec un nombre fini d'éléments est un corps.

Indication – S'intéresser aux propriétés de l'application : pour $a \in A \setminus \{0\}$ fixé, $m_a : A \rightarrow A, x \mapsto a.x$

b) Montrer que si K est un corps et A est un K -algèbre intègre de dimension finie alors A est un corps.

Exercice 5. Soit A, B deux anneaux et $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

a) Soit J un idéal de B . Montrer que $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de A

b) Si φ est *surjectif* et I est un idéal de A , montrer que $\varphi(I)$ est un idéal de B .

c) Contre-exemple au b) si φ non surjective ?

Exercice 6. Soit K un corps et $A = K \times K$.

a) Rappeler comment on définit une structure d'anneau sur A (structure d'anneaux produit).

b) L'anneau A est-il un corps ?

c) Décrire les idéaux de A .

Rappels sur l'arithmétique des polynômes et les complexes

Exercice 7. Déterminer les réels a et b pour que $A(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $B = X^2 + X + 1$ et déterminer le quotient.

Exercice 8. Calculer le pgcd de $X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$.

Exercice 9. Décomposer en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes : $X^4 + 1, X^4 + X^2 + 1, (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Exercice 10 (Bézout optimisé). Soient K un corps et P, Q deux polynômes non nuls, dans $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.

a) On fixe un couple $(U_0, V_0) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $PU_0 + QV_0 = 1$.

Déterminer à l'aide de (U_0, V_0) la forme de *tous* les couples $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $PU + QV = 1$.

b) Montrer qu'il existe une unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel qu'on ait les trois conditions : $PU + QV = 1, \deg(U) < \deg(Q)$ et $\deg(V) < \deg(P)$.

Autour de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

Exercice 11. Reprenez l'énoncé du petit théorème de Fermat (deux formes) et traduisez le dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 12 (Thm. de Wilson). a) Soit p un nombre premier, montrer que $(p-1)! \equiv -1 [p]$.

Indication – Regrouper chaque élément de $\{1, \dots, p-1\}$ avec son inverse dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b) Réciproquement, montrer que si $n \geq 2$ vérifie $(n-1)! \equiv -1 [n]$ alors n est premier.

Indication – Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

c) Retrouver le résultat de Wilson à l'aide du petit théorème de Fermat en factorisant $X^{p-1} - 1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

Polynômes appliqués à des matrices, polynôme minimal

Exercice 13 (Calcul de puissances de matrices à l'aide d'un polynôme annulateur).

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(i) Vérifier qu'en notant $P = X^2 - 4X + 4$ on a $P(A) = 0$.

(ii) En utilisant le reste de la division euclidienne de X^n par P , expliciter A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Soit $M \in M_n(K)$ telle $M^q = 0$.

a) Montrer que $I - M$ est inversible et exprimer son inverse comme un polynôme en M .

b) Montrer que $I + 2M + 3M^2 + \dots + qM^{q-1} = (I - M)^{-2}$.

Exercice 15 (Calcul d'inverse de matrices à l'aide d'un polynôme annulateur). Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

Déterminer un polynôme annulateur de A et B et en déduire A^{-1} et B^{-1} .

Exercice 16. Soit $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ la permutation circulaire définie par $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sigma(i) = i+1$ et $\sigma(n) = 1$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

Soit P la matrice de f dans la base canonique.

a) Que vaut P^n ?

b) Justifier que la famille $(I, P, P^2, \dots, P^{n-1})$ est libre dans $M_n(\mathbb{R})$.

c) En déduire le polynôme minimal de P .

Exercice 17. a) Quel est le polynôme minimal d'une matrice nilpotente d'indice r ?

b) Si $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec A et B matrices carrées, déterminer une relation entre μ_M et les polynômes μ_A et μ_B .

c) Soient $(a, b, c) \in K^3$ et $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme minimal de M .