

Banque CCINP : Ex 59 1. et 2., 60, 62 (sauf 2.a), 64, 71

E.v., familles libres, génératrices, bases, supplémentaires, dimension

Exercice 1. Soit F l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^4$ tels que
$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, trouver la dimension et une base de F .

Exercice 2. Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\sqrt[n]{|u_n|})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.
Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3 (Résultat standard, mais pas explicitement au programme : rejustifier à chaque fois).

Dans cet exercice, on note $\ll_a$ (notation de Hardy) pour la négligeabilité qu'on note dans le programme o_a (notation de Landau).

Déf. Une famille $(f_1, \dots, f_n)$ des fonctions définies sur un voisinage V (au moins à droite ou à gauche) d'un point $a \in \mathbb{R}$ privé de a , est dite *totalelement ordonnée pour la relation de négligeabilité en a* ssi (quitte à réordonner les indices), on a :

$$f_1 \ll_a f_2 \ll_a \dots \ll_a f_n$$

On suppose qu'il existe un voisinage de a privé de a , (au moins à droite ou à gauche) sur lequel chaque fonction f_i ne s'annule pas.

a) **Prop.** (*très utile, mais à redém. à chaque fois, par récurrence*). Montrer que si $(f_1, \dots, f_n)$ est totalelement ordonnée pour la relation $\ll_a$ alors $(f_1, \dots, f_n)$ est *libre*

b) (i) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note ici $f_\alpha :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$.

Justifier que la famille (infinie) $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

(ii) Plus généralement, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{\alpha, \beta} :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha \ln^\beta(x)$.

Montrer que la famille $(f_{\alpha, \beta})_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$ est libre.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on définit $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^k(1-x)^{n-k}$. La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 4 (Excursion sur les quasi-polynômes). Une fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est appelée un *quasipolynome* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, des coefficients $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et des exposants $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ dans $\mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall x > 0, f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{\alpha_i}$$

a) En supposant que les coefficients sont non nuls, montrer que l'écriture ci-dessus est unique.

b) Montrer que si f n'est pas identiquement nulle, alors f n'admet qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 5 (Codimension). a) Définir ce qu'est un hyperplan d'un espace vectoriel, même si celui-ci est de dimension infinie. Proposer et démontrer plusieurs caractérisations équivalentes.

b) Oral Centrale 1, Q1 : Soit E un K -e.v. de dimension infinie et F un s.e.v. de E tel qu'il existe un supplémentaire G de F de dimension d . Montrer que pour tout G' s.e.v. de E tel que $F \oplus G = F \oplus G' = E$ on a $\dim G = \dim G'$.

Cette valeur commune de la dimension de tous les supplémentaires de F s'appelle *codimension* de F .

Indication (non donnée à l'oral) : on pourra considérer le projecteur π sur G parallèlement à F .

Exercice 6 (Plus particulier... pour les 5/2). Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension n . Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_m)$ est dite *positivement génératrice* ssi tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients positifs des éléments de $\mathcal{F}$

Quel est le cardinal minimal d'une famille positivement génératrice de E ?

Applications linéaires

Exercice 7 (Applications $\mathbb{R}$ -linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$). a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$.

b) Montrer réciproquement que toute application $\mathbb{R}$ -linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme précédente.

c) Avec les notations du a), déterminer une CNS sur (α, β) pour que f soit bijective.

Exercice 8 (Suites réc. d'ordre 3... pour réviser les arguments vus pour l'ordre 2). a) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de ses lois usuelles de $\mathbb{R}$ -e.v.

On fixe un entier n_0 . Montrer que l'application $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}^{n_0+1}, u \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{n_0})$ est linéaire.

b) Soit $F = \{(u_n) \in E, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n\}$ Montrer que $\pi : F \rightarrow \mathbb{R}^3, u \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c) Déterminer, en justifiant votre démarche, une écriture explicite en fonction de n pour tous les termes de la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3, u_1 = 6, u_2 = 14$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

d) (5/2 ou après le chapitre A2) On considère la suite $(\overline{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les classes modulo 17 des u_n précédents, ce qui a un sens car tous les termes de (u_n) sont des entiers.

Démontrer que la suite $(\overline{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique.

Exercice 9. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $g \circ f = \text{id}_E$.

Montrer que $\ker(g) \oplus \text{Im}(f) = F$.

Sommes directes de plus de deux s.e.v.

Exercice 10 (Système d'idempotents « étrangers » et somme directes). Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $p_1, \dots, p_r \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$ et $\text{id}_E = p_1 + \dots + p_r$. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Im}(p_i)$.

Exercice 11 (Grassmann avec les sommes directes). Soit E un K -e.v. et F et G deux s.e.v. de dim. finie de E . Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans G . Montrer que $F + G = (F \cap G) \oplus F_1 \oplus G_1$ et retrouver ainsi la formule de Grassmann.

Théorème du rang et conséquences

Exercice 12.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. finie.

Montrer $E = \ker f \oplus \text{Im } f$ si, et seulement si, $f|_{\text{Im } f}$ est un automorphisme.

Exercice 13. Soient E et F deux K -e.v. de dim. finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que $\dim \ker(u + v) \leq \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) + \dim(\ker(u) \cap \ker(v))$

Indication – On pourra considérer $w = u|_{\ker(u+v)} \in \mathcal{L}(\ker(u+v), F)$.

Exercice 14 (Une démonstration de la formule de Grassmann avec le théorème du rang). Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$ -e.v. Le a) et le b) sont des questions de cours.

a) Rappeler comment on définit une loi $+$ sur $E_1 \times E_2$ et une loi externe de $\mathbb{K} \times (E_1 \times E_2) \rightarrow (E_1 \times E_2)$ à partir des lois sur E_1 et E_2 . On ne demande pas de vérifier que cela définit bien une structure de $\mathbb{K}$ -e.v. sur $E_1 \times E_2$, cela ne poserait aucune difficulté.

b) Si $\dim(E_1) = d_1$ et $\dim(E_2) = d_2$, que dire de $\dim(E_1 \times E_2)$?

Réfléchissez sur des exemples simples...avant de faire un raisonnement général.

c) On suppose désormais que E_1 et E_2 sont deux s.e.v. de dimension finie d'un même e.v. E . On considère $\Phi : E_1 \times E_2 \rightarrow E_1 + E_2 \subset E$ définie par $\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \Phi(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

i) Montrer que $\ker \Phi$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$ (on exhibera cet isomorphisme !)

ii) Montrer que le théorème du rang appliqué à Φ prouve alors la formule de Grassmann.

Exercice 15 (IMT 2026 (Janelle)). Soient $I_1, \dots, I_n$ des segments de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive deux à deux disjoints.

- a) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\int_{I_k} P = 0$. Montrer que $P = 0$.
- b) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\int_{I_k} P(t) dt = a_k$?

Exercice 16 (Incontournable : La suite des dimension des images diminue de moins en moins vite). Soit E un K -e.v. de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

En considérant pour chaque $p \in \mathbb{N}$, $f|_{\text{Im } f^p} : \text{Im } f^p \rightarrow \text{Im } f^{p+1}$, montrer que la suite des $\dim(\text{Im } f^p) - \dim(\text{Im } f^{p+1})$ est décroissante.

Calcul matriciel et calculs par blocs

Exercice 17 (Incontournable H.P. mais à connaître !). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,i}| > \sum_{k \neq i, k=1}^n |a_{i,k}|$. Montrer que A est inversible. (On dit que A est à diagonale strictement dominante).

Indication – On pourra raisonner par l'absurde et considérer un $X \in \ker A \setminus \{0\}$.

Exercice 18 (Propagation des rangées de zéros). On note, pour tout $k \in \llbracket -(n-1), (n-1) \rrbracket$, Δ_k l'ensemble des matrices ayant toutes leur entrées nulles sauf éventuellement celles sur la diagonale numéro k i.e. sauf éventuellement les entrées (i, j) tel que $j - i = k$.

Par exemple Δ_0 est l'ensemble des matrices diagonales et Δ_1 les matrices ayant toutes les entrées nulles sauf sur la première diagonale supérieure.

On convient que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $|k| \geq n$, $\Delta_k = \{0\}$.

a) Montrer que le produit de matrice définit une application de $\Delta_k \times \Delta_l$ dans Δ_{k+l} .

b) En remarquant que $TSS_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k \geq 1} \Delta_k$, montrer si $A \in TSS_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$A^p \in \bigoplus_{k \geq p} \Delta_k$. Que dire si $p \geq n$?

Exercice 19. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ une matrice (dite « triangulaire par bloc »), où les blocs A et D sont des matrices carrées quelconques, pas forcément de même taille.

Montrer que M est nilpotente si, et seulement si, A et D le sont.

Exercice 20 (Inversibilité d'une matrice par bloc). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & I_n \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible si, et seulement si, $\alpha - LC \neq 0$ et calculer alors A^{-1} .

Rang d'une matrice

Exercice 21. Suivant les valeurs de a, b, c, d dans $\mathbb{K}$, calculer $\text{rg}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & bc & ad & bd \end{pmatrix}$.

Exercice 22 (Rang et matrices extraites : Un résultat du cours de 1ère année souvent oublié). Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appellera sous-matrice de A obtenue avec les lignes $L_{i_1}, \dots, L_{i_p}$ et les colonnes $C_{j_1}, \dots, C_{j_q}$ (où $i_1 < \dots < i_p$ sont dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ et $j_1 < \dots < j_q$ sont dans $\llbracket 1, n \rrbracket$) la matrice $A' = (a'_{k,l}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par $\forall (k, l) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, a'_{k,l} = a_{i_k, j_l}$.

(i) Montrer que si A' est une sous-matrice de A alors $\text{rg}(A') \leq \text{rg}(A)$.

(ii) Montrer que si $\text{rg}(A) = r$ il existe une sous-matrice A' de A qui est une matrice carrée de taille r inversible.

(iii) Montrer que le rang d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe une sous-matrice de A carrée de taille r inversible.

(iv) Montrer que le rang ne change pas si on considère A comme élément de $M_{m,n}(L)$ où L est un corps contenant $\mathbb{K}$.

Déterminants et déterminants par blocs

Exercice 23. Calculer le déterminant $P_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & x+n \end{vmatrix}$.

Exercice 24. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 x_3 \dots x_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 x_2 \dots x_{n-1} \end{vmatrix}$.

Exercice 25 (Déterminant de Hürwitz). a) Calculer $A_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}$.

b) Calculer $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ a & x_2 & \ddots & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x_n \end{vmatrix}$.

Indication – En notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$D_n = \det(aC + (x_1 - a)E_1, \dots, aC + (x_n - a)E_n).$$

c) Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}$ pour $a \neq b$, en considérant

$$\Delta_n(X) = \begin{vmatrix} x_1 + X & a + X & \dots & a + X \\ b + X & x_2 + X & \ddots & a + X \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b + X & \dots & b + X & x_n + X \end{vmatrix}, \text{ et en montrant que } \Delta_n(X) \text{ est un polynôme de}$$

degré au plus un.

Indication – Pour simplifier, on exprimera le résultat en fonction des valeurs de la fonction polynomiale associée à $Q = (x_1 - X) \dots (x_n - X)$.

d) Retrouver le résultat du b) à partir de celui du c) par un raisonnement de passage à la limite, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le déterminant des matrices par blocs suivantes, en fonction de $\det A$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{pmatrix}$$

Exercice 27 (Endomorphisme de multiplication). Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$, $L_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \\ M \mapsto AM \end{cases}$

et $R_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \\ M \mapsto MA. \end{cases}$

a) Calculer $\det(L_A)$ et $\det(R_A)$ en fonction du déterminant de A .

Indication – On pourra considérer les matrices de L_A et R_A dans la base des $(E_{i,j})$ convenablement ordonnée.

b) Calculer aussi $\text{Tr}(L_A)$ et $\text{Tr}(R_A)$.

Révisions sur la comatrice

Exercice 28 (Incontournable). Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\widehat{A}$ sa comatrice. Déterminer le rang de $\widehat{A}$ en fonction du rang de A .

Exercice 29. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Montrer que $\text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-2}A$.