

D.M. 3 MP

Pour le lundi 28 septembre

Notations :

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Dans ce problème, on identifie polynômes formels et fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ associées. On identifie de plus les éléments de $\mathbb{K}$ aux polynômes constants.
- Tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique $p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où (a_k) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Si p n'est pas le polynôme nul, son degré $\deg(p)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul est -1 (cette convention est inhabituelle).
- On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
- On note I l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}[X]$.
- Les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ sont les endomorphismes bijectifs (automorphismes) de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
- Pour $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et $p \in \mathbb{K}[X]$, on note $Tp = T(p)$.
- D désigne l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $\forall p \in \mathbb{K}[X], D(p) = Dp = p'$.
- Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, on définit la suite d'endomorphismes (T^k) par récurrence : $T^0 = I$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}, T^{k+1} = T \circ T^k = T^k \circ T$.

I Étude d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on pose $E_a(p) = E_a p = p(X + a)$.

Q 1) Montrer que E_a est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

À tout $p \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction $J(p) = Jp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(p)(x) = Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t) dt.$$

Q 2) Montrer que J est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q 3) Montrer que J conserve le degré et que J est inversible.

À tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $L(p) = Lp$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad L(p)(x) = Lp(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-t} p'(x+t) dt.$$

où, par définition, $\int_0^{+\infty} e^{-t} p'(x+t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-t} p'(x+t) dt$, à condition que cette limite existe, et p' désigne la dérivée du polynôme p .

Q 4) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ et calculer sa valeur.

Q 5) Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Est-il inversible ?

II Formule de Taylor pour les endomorphismes invariants par translation

Soit T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que :

- T est invariant par translation si, pour tout $a \in \mathbb{K}, E_a \circ T = T \circ E_a$;
- T est un endomorphisme delta si T est invariant par translation et si l'image du polynôme X par T est une constante non nulle : $TX \in \mathbb{K}^*$.

Q 6) Soit $a \in \mathbb{K}$. Vérifier que les endomorphismes I et D sont invariants par translation, ainsi que les endomorphismes E_a, J et L définis dans la partie I. Sont-ils des endomorphismes delta ?

Q 7) Montrer que l'ensemble des endomorphismes invariants par translation de $\mathbb{K}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. L'ensemble des endomorphismes delta de $\mathbb{K}[X]$ est-il stable par addition ? par composition ?

- Q 8)** Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, montrer que l'expression

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$$

a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ l'application de $\mathbb{K}[X]$ qui, à un polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, associe le polynôme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$.

- Q 9)** Montrer que, pour toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est un endomorphisme invariant par translation.
- Q 10)** Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $q_n = \frac{X^n}{n!}$. On se donne T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

- Q 11)** Montrer que T est un endomorphisme invariant par translation si, et seulement si,

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k \quad (*)$$

Indication – Pour le sens $\Rightarrow$ on pourra montrer que les deux membres de $(*)$ coïncident sur la base (q_n) .

- Q 12)** Montrer que deux endomorphismes invariants par translation de $\mathbb{K}[X]$ commutent.

Dans ce qui suit on applique le résultat de la question 11 aux endomorphismes de la partie I.

- Q 13)** Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$, montrer, à l'aide de la question 11, que

$$p(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}$$

où $p^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième du polynôme p . Reconnaître cette formule.

- Q 14)** Pour $p \in \mathbb{K}[X]$, exprimer Jp en fonction des dérivées $p^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) de p .
- Q 15)** Démontrer que l'endomorphisme $D - I$ est inversible et exprimer L en fonction de $(D - I)^{-1}$.

Dans ce qui suit T est un endomorphisme non nul invariant par translation de $\mathbb{K}[X]$.

On rappelle que le degré du polynôme nul est ici par convention égal à -1.

- Q 16)** On pose $n(T) = \min \{k \in \mathbb{N} : Tq_k(0) \neq 0\}$, vérifier que pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$,

$$\deg(Tp) = \max\{-1, \deg(p) - n(T)\}.$$

- Q 17)** En déduire $\ker(T)$ en fonction de $n(T)$.

- Q 18)** Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) T est inversible ;
- (2) $T1 \neq 0$;
- (3) $\forall p \in \mathbb{K}[X], \deg(Tp) = \deg(p)$.

- Q 19)** Si ces conditions sont vérifiées, montrer que T^{-1} est encore un endomorphisme invariant par translation.

Dans ce qui suit T est un endomorphisme delta de $\mathbb{K}[X]$.

- Q 20)** Montrer qu'il existe une suite de scalaires $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\alpha_0 = 0, \alpha_1 \neq 0$ et $T = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k$.
- Q 21)** Montrer qu'il existe un unique endomorphisme U invariant par translation et inversible tel que $T = D \circ U$. Préciser U dans le cas $T = D$, puis dans le cas $T = L$.
- Q 22)** Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul, vérifier que $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. En déduire $\ker(T)$ et (5/2 ou après le R1) le spectre de T .
- Q 23)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la restriction de T à $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. (5/2 ou après le R1) Est-il diagonalisable ?
- Q 24)** Déterminer $\text{Im}(T_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que T est surjectif.