

D.M.2 : Ordre sur les projecteurs et un théorème sur les automorphismes d'algèbres de $M_n(K)$

Pour le lundi 14 septembre 2026

1 Un ordre sur les projecteurs

1) **Un résultat général sur les commutants.**

Soit E un K -espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$ appelé le commutant de f . Montrer que : $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$

2) **Un exemple de projecteur :** Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base

canonique $\mathcal{B}_0$ est $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que p est un projecteur de E et déterminer

une base $\mathcal{B}'$ de $\text{Im}(p)$ et une base $\mathcal{B}''$ de $\text{Ker } p$. On appelle $\mathcal{B}$ la base de E obtenue en juxtaposant $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.

3) **Caractérisation géométrique des éléments de $\mathcal{C}(p)$ pour p projecteur quelconque :**

Soit E un K -espace vectoriel quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E .

Montrer que $f \in \mathcal{C}(p)$ si, et seulement si, $\text{Im } p$ et $\text{ker } p$ sont stables par f .

4) **Retour à l'exemple du 2) :**

On reprend l'exemple du projecteur p du 2) avec la base $\mathcal{B}$ de cette question.

a) Traduire le résultat du 3) matriciellement en caractérisant les éléments de $\mathcal{C}(p)$ par la forme de leur matrice dans la base $\mathcal{B}$.

b) Retrouver le résultat du a) par un pur calcul matriciel (à l'aide de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$).

5) **Un ordre sur l'ensemble des projecteurs :**

Soit E un K -espace vectoriel et $\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{L}(E), p^2 = p\}$ l'ensemble des projecteurs de E .

Pour tout $(p, q) \in \mathcal{P}^2$, on note $p \leq q$ ssi $p \circ q = q \circ p = p$.

a) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{P}$.

b) Justifier que $\leq$ n'est pas une relation d'ordre total dès que $\dim E \geq 2$.

6) **Autour de la condition de commutation :** Montrer que si deux projecteurs p, q commutent alors la composée $p \circ q$ est un projecteur et exprimer son noyau et son image à l'aide de ceux de p et q .

7) **Caractérisation géométrique de la relation $\leq$ dans le cas commutatif ;**

Soit $(p, q) \in \mathcal{P}^2$ tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :

a) $p \leq q \Leftrightarrow \text{ker } q \subset \text{ker } p$. b) $p \leq q \Leftrightarrow \text{Im } p \subset \text{Im } q$.

8) **Borne sup. de deux projecteurs qui commutent :**

Soient p et q dans $\mathcal{P}$ tels que $p \circ q = q \circ p$.

a) Montrer que $r = p + q - (p \circ q)$ est un projecteur.

b) Montrer que r est le plus petit des majorants de $\{p, q\}$ pour l'ordre $\leq$ et que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

2 Formes linéaires et les endomorphismes de rang un :

Soit E un K -e.v. de dim. n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $e_i^* : E \rightarrow K, \sum_{k=1}^n x_k e_k \mapsto x_i$ la i -ième forme coordonnée.

Pour chaque $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $u_{i,j} : E \rightarrow E, \sum_{k=1}^n x_k e_k \mapsto x_j e_i$.

- 9) Deux bases utiles :
- a) Montrer que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E, K)$. Cette base sera appelée la base duale de $\mathcal{B}$. L'espace $\mathcal{L}(E, K)$ est appelé *espace dual* de E et noté aussi E^* .
 - b) Montrer que $(u_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.
- 10) Pour chaque couple $(\varphi, \varepsilon) \in (E^* \setminus \{0\}) \times (E \setminus \{0\})$ on définit une application notée $u_{\varphi, \varepsilon}$ de E dans E par $\forall x \in E, u_{\varphi, \varepsilon}(x) = \varphi(x)\varepsilon$.
- a) Montrer que $u_{\varphi, \varepsilon} \in \mathcal{L}(E)$, préciser son noyau et son image.
 - b) Ecrire les $u_{i,j}$ de la question 9b) comme des $u_{\varphi, \varepsilon}$.
 - c) Parmi les $u_{i,j}$ lesquels sont des projecteurs ? Déterminer plus généralement une CNS sur φ et ε pour que $u_{\varphi, \varepsilon}$ soit un projecteur.
- 11) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1 si, et seulement si, il s'écrit $u = u_{\varphi, \varepsilon}$ pour un certain couple $(\varphi, \varepsilon) \in (E^* \setminus \{0\}) \times (E \setminus \{0\})$.
- 12) On considère, comme dans la partie 1, l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs dans $\mathcal{L}(E)$ muni de la relation d'ordre définie par $p \leq q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p$.
- Définition :** un projecteur $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ est dit *minimal* pour $\leq$ ssi pour tout $q \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$, si $q \leq p$ alors $q = p$.

Attention à la notion d'élément *minimal* pour l'ordre $\leq$ partiel. Cette notion est distincte de celle de *minimum* pour un ordre total. Il ne s'agit pas de dire qu'un p minimal est plus petit que *tous* les q mais seulement qu'il est plus petit que *tous les q qui lui sont comparables*.

Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- (i) p est un projecteur de rang 1,
- (ii) p est un élément *minimal* de $\mathcal{P} \setminus \{0\}$ pour la relation $\leq$,
- (iii) il existe $(\varphi, \varepsilon) \in E^* \times E$ tel que $p = u_{\varphi, \varepsilon}$ et $\varphi(\varepsilon) = 1$.

3 Un théorème sur les automorphismes de l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$

- 13) Exemple (fondamental) : soit $g \in GL(E)$ et $A : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}$.
Montrer que A est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
- Motivation pour la suite :** Le but du reste du problème est de montrer que tous les automorphismes d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ sont de cette forme.
- 14) Soit A un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
- a) Si $p \in \mathcal{P}$ que dire de $A(p)$?
 - b) Si $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ est minimal pour l'ordre $\leq$, que dire de $A(p)$?
 - c) En déduire qu'il existe une famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs de E et une famille $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ de formes linéaires sur E telles que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A(u_{i,i}) = u_{\phi_i, \varepsilon_i} \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \phi_i(\varepsilon_i) = 1.$$
 - d) Calculer $\phi_i(\varepsilon_j)$ pour chaque $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. (On pourra considérer $A(u_{i,i}) \circ A(u_{j,j})$).
En déduire que les familles $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ sont libres et que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est la base duale de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.
- 15) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
- a) En considérant des composées de $A(u_{i,j})$ avec d'autres applications, déterminer le noyau, le rang, l'image de $A(u_{i,j})$.
 - b) En déduire qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\phi_j, \varepsilon_i}$.
 - c) Montrer que pour tout $(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3, \lambda_{i,j} \cdot \lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.
- 16) Montrer qu'il existe une base $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de E telle que si on note $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ sa base duale, on ait :
- $$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}.$$
- 17) Conclure qu'il existe un $g \in GL(E)$ tel que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$.
puis que $A : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}$.