

D.M. 2 : solution

1 Un ordre sur les projecteurs

1) a) Montrons que $C(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

(i) $C(f)$ contient l'application $0 \in \mathcal{L}(E)$ de manière évidente

(ii) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(g_1, g_2) \in C(f)^2$.

Alors pour tout $f \in S$, par bilinéarité de la composition : $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f = \lambda_1 (g_1 \circ f) + \lambda_2 (g_2 \circ f) = \lambda_1 (f \circ g_1) + \lambda_2 (f \circ g_2)$ car g_1 et g_2 sont dans S .

En regroupant, on obtient bien que $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f = f \circ (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)$.

Donc $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \in C(f)$.

Avec (i) et (ii) on a montré que $C(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrons que $C(f)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.

(i) Comme on sait déjà que $C(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$, en part. c'est un sous-groupe de $(\mathcal{L}(E), +)$.

(ii) On sait que : $\text{id}_E \in C(f)$.

(iii) Reste à montrer que $C(f)$ est stable par $\circ$:

Soit $(g_1, g_2) \in C(f)^2$. Soit $f \in S$.

Alors $(g_1 \circ g_2) \circ f = g_1 \circ (g_2 \circ f) \stackrel{(1)}{=} g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 \stackrel{(2)}{=} (f \circ g_1) \circ g_2 = f \circ (g_1 \circ g_2)$.

Notons que (1) et (2) sont vraies car prop. $g_1 \in C(f)$ et $g_2 \in C(f)$.

D'où la conclusion $g_1 \circ g_2 \in C(f)$.

Avec (i), (ii), (iii), on a montré que $C(f)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Au total : $C(f)$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$.

2) (i) Pour montrer que p est un projecteur, il suffit de montrer que $A^2 = A$.

Par exemple pour la première entrée de A^2 on a $1/9(2^2 + 0 \times 1 + (-2) \times (-1) + 0) = 1/9(4 + 2) = 2/3$ qui est bien la première entrée de A . On calcule ainsi A^2 et on voit que $A^2 = A$ et donc $p \in \mathcal{P}$.

(ii) Pour déterminer une base de $\text{Im}(p)$:

En notant C_i les colonnes de la matrice, on voit que $C_4 = 0$ et $C_3 = -C_1$.

Donc en notant $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on sait alors que $\text{Im } p = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2), p(e_3), p(e_4)) = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2))$ et ces deux vecteurs $p(e_1)$ et $p(e_2)$ sont indépendants (colonnes non proportionnelles). Donc $\text{Im}(p)$ admet comme base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (2, 0, -1, 0)$ et $\varepsilon_2 = (1, 3, 1, 0)$.

(iii) Pour $\ker p$. Avec les colonnes, on a $p(e_4) = 0$ et $p(e_3) = -p(e_1)$ i.e. $p(e_3 + e_1) = 0$.

Cela fournit donc deux vecteurs indépendants e_4 et $e_3 + e_1$ dans $\ker p$. Comme par théorème du rang, $\dim \ker p = 4 - 2 = 2$, on sait que $(e_1 + e_3, e_4)$ est une base de $\ker p$

3) Le sens $\Rightarrow$ n'utilise pas le fait que p est un projecteur et est un résultat de cours.

4) a) Par le 3), les éléments de $\mathcal{C}(p)$ sont exactement les f tels que $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par f . Cela équivaut à dire que leur matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ où les } * \text{ désignent à chaque fois un nombre quelconque.}$$

b) On sait que la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de p est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour une matrice $M = (m_{i,j}) \in M_4(\mathbb{R})$ quelconque $MP = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 0 & 0 \\ m_{4,1} & m_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $PM =$

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Donc}$$

$$MP = PM \Leftrightarrow m_{4,1} = m_{4,2} = m_{3,1} = m_{3,2} = m_{1,3} = m_{1,4} = m_{2,3} = m_{2,4} = 0$$

Ceci équivaut bien à dire que M est de la forme $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$ donnée au a).

5) a) On veut montrer que $\leq$ est réflexive, antisymétrique, transitive.

(i) Réflexivité : soit $p \in \mathcal{P}$. On veut montrer que $p \leq p$. Or la relation $p \leq p$ équivaut à $p \circ p = p$ ce qui est vrai car p est un projecteur.

(ii) Antisymétrie : soit $(p, q) \in \mathcal{P}^2$ tels que $p \leq q$ et $q \leq p$.

On a donc $p \circ q = q \circ p = p$ et $p \circ q = q \circ p = q$ donc $p = q$.

(iii) Transitivité : soit $(p, q, r) \in \mathcal{P}^3$ tels que $p \leq q$ et $q \leq r$.

On a donc $p \circ q = p$ (1), $q \circ p = p$ (2), $q \circ r = q$ (3), $r \circ q = q$ (4).

On veut montrer que $p \circ r = p$ (5), et $r \circ p = p$ (6).

• Or en composant par r à droite dans (1), on a : $p \circ q \circ r = p \circ r$.

Avec (3) dans le premier membre de cette égalité, on obtient $p \circ q = p \circ r$.

Et de nouveau avec (1), on obtient finalement $p = p \circ r$ ce qui est bien (5).

• En composant par r à gauche dans (2), on a : $r \circ q \circ p = r \circ p$.

Dans le premier membre de cette égalité, avec (4) on obtient $q \circ p = r \circ p$ puis avec (2), finalement $p = r \circ p$ ce qui est (6).

b) Il suffit de trouver deux projecteurs p et q non nuls tous les deux tels que $p \circ q = q \circ p = 0$. Pour cela, on choisit une décomposition de E en somme directe de deux sous-espaces $E = E_1 \oplus E_2$ avec $E_1 \neq \{0\}$ et $E_2 \neq \{0\}$ et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et q le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 .

On a alors bien $p \circ q = q \circ p = 0$ et $p \neq 0$, $q \neq 0$.

6) Avec $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q \circ q \circ p = p \circ q^2 \circ p = p \circ q \circ p = p \circ p \circ q = p \circ q$ on a bien $p \circ q$ projecteur. Pour l'image : on a $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im } p$ et $\text{Im}(q \circ p) \subset \text{Im } q$. Donc ici en posant $r = p \circ q = q \circ p$, on a $\text{Im } r \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Mais réciproquement si $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q = \text{Fix } p \cap \text{Fix } q$, on a $p \circ q(x) = x$ donc $x \in \text{Fix}(p \circ q) = \text{Im } p \circ q$.

Donc on a montré que $\boxed{\text{Im}(p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q}$.

Pour le $\ker$: on a $\ker p \subset \ker(q \circ p)$ et $\ker q \subset \ker(p \circ q)$, donc ici pour $r = p \circ q = q \circ p$, on a $\ker p + \ker q \subset \ker(r)$.

Mais réciproquement, si $x \in \ker r$, on le décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker p$ et $x_2 \in \text{Fix } p$ alors $p(x) = x_2$ et $q \circ p(x) = 0$ donc $q(x_2) = 0$ donc $x_2 \in \ker q$. Donc $x = x_1 + x_2 \in \ker p + \ker q$.

On a donc montré que $\ker(p \circ q) = \ker p + \ker q$

7) a) Sens $\Rightarrow$: on a $p \leq q$ et donc $p \circ q = p$ (1).

Avec la question précédente, comme $p \circ q = q \circ p$, on sait que $p \circ q$ est un projecteur de noyau $\ker p + \ker q$.

Avec (1) on a alors $\ker p + \ker q = \ker p$ ce qui montre bien que $\ker q \subset \ker p$.

Bien sûr, on peut aussi faire une preuve indépendante de la question précédente :

Soit $x \in \ker q$. Alors $q(x) = 0$ donc $p(q(x)) = p(0) = 0$ et avec (1), on a $p(x) = 0$ donc $x \in \ker p$. On a bien montré l'inclusion $\ker q \subset \ker p$.

Sens $\Rightarrow$: on a $\ker q \subset \ker p$.

Soit $x \in E$. Comme q est un projecteur, on sait que $E = \ker q \oplus \text{Fix}(q)$ et on écrit $x = x_K + x_I$ avec $x_K \in \ker(q)$ et $x_I \in \text{Fix}(q)$.

Alors $q(x) = x_I$ et donc $p(q(x)) = p(x_I) \quad (*)$.

D'autre part par linéarité $p, p(x) = p(x_K) + p(x_I)$ et comme $x_K \in \ker q \subset \ker p$, on en déduit que $p(x) = p(x_I) \quad (**)$.

Avec $(**)$ et $(*)$, on a $p \circ q = p$ et comme p et q commutent par hyp. on a bien $p \leq q$.

- b) Sens $\Leftarrow$: on a $p \leq q$ et donc $q \circ p = p \quad (2)$. Soit $y \in \text{Im } p$. On a un $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Avec (2) , on a $y = q(p(x))$ donc $y = q(z)$ donc $y \in \text{Im } q$. On a bien montré l'inclusion $\text{Im } p \subset \text{Im } q$.

Sens $\Rightarrow$: on a $\text{Im } p \subset \text{Im } q$, c'est-à-dire, comme p et q sont des projecteurs $\text{Fix}(p) \subset \text{Fix}(q)$.

Soit $x \in E$. Comme p est un projecteur, on sait que $E = \ker p \oplus \text{Fix}(p)$ et on écrit $x = x_K + x_I$ avec $x_K \in \ker(p)$ et $x_I \in \text{Fix}(p)$

Alors $p(x) = x_I \quad (*)$ et donc $q(p(x)) = q(x_I)$. Mais comme $\text{Fix}(p) \subset \text{Fix}(q)$, on a aussi $q(x_I) = x_I$.

Ainsi $q(p(x)) = x_I \quad (**)$ et donc avec $(*)$ et $(**)$ on a : $q(p(x)) = p(x)$.

On a donc $q \circ p = p$ et comme p et q commutent par hyp. on a bien $p \leq q$.

- 8) a) Notons $r = p + q - p \circ q$. Alors comme p et q commutent et qu'on a vu que le commutant était stable par $\circ$ tous les termes de la somme commutent entre eux, $r^2 = (p + q - p \circ q) \circ (p + q - p \circ q) = p^2 + q^2 + (p \circ q)^2 + 2p \circ q - 2p \circ (p \circ q) - 2q \circ (p \circ q)$. Avec $p^2 = p, q^2 = q$ et les commutations, on obtient $r^2 = p + q + 2p \circ q - 2p \circ q - 2p \circ q = r$ donc $r \in \mathcal{P}$.

- b) On veut montrer que :

- (i) r est un majorant de p et q ,
- (ii) tout majorant s de p et q vérifie $r \leq s$.
- (iii) $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

• Pour le (i) (et une partie du (iii)), sachant que p et q commutent, avec le 1) on sait que r commute aussi à p et q , et donc par 6) b) il suffit de montrer que $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(r) \quad (1)$ et $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(r) \quad (2)$.

Comme les images sont les s.e.v. fixes : soit $y \in \text{Im}(p) = \text{Fix}(p)$, on a $p(y) = y$ et $r(y) = y + q(y) - (q \circ p)(y) = y + q(y) - q(y) = y$ donc $y \in \text{Fix}(r)$.

Comme la déf. de r est symétrique en p, q , on a aussi (2) en échangeant les rôles

Ainsi avec 6.b) on sait que r est un majorant de $\{p, q\}$ i.e. notre (i).

• Pour le (ii) : soit s un majorant de $\{p, q\}$, on veut montrer que $r \leq s$ autrement dit que $r \circ s = s \circ r = r$.

Comme s commute à p et q , on sait (cf. 1)) que s commute à $r = p + q - p \circ q$.

Si on considère par exemple $s \circ (p + q - p \circ q) = s \circ p + s \circ q - s \circ p \circ q$, comme $s \circ p = p$ et $s \circ q = q$, on obtient :

$$s \circ r = p + q - p \circ q = r$$

D'où le (ii).

• Pour le (iii), on a déjà montré pour le (i) que $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(r) \quad (1)$ et $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(r) \quad (2)$ et donc (comme $\text{Im } r$ est un s.e.v.) on a l'inclusion : $\text{Im}(p) + \text{Im}(q) \subset \text{Im}(r)$. Réciproquement : si $y \in \text{Im}(r)$, on a un $x \in E$ tel que $y = p(x) + q(x) - p(q(x)) = p(x - q(x)) + q(x)$ avec $p(x - q(x)) \in \text{Im } p$ et $q(x) \in \text{Im}(q)$ donc $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, d'où l'autre inclusion $\text{Im}(r) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

On a bien montré que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

Exercice supplémentaire : Que dire de $\ker(r)$?

2 Un détour par les formes linéaires

- 9) a) On considère l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \rightarrow M_{1,n}(\mathbb{K})$ qui à toute forme linéaire φ associe sa matrice $(\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}$ au départ (à l'arrivée il s'agit de scalaires, on ne précise donc pas la base d'arrivée de $\mathbb{K}$ qui est en fait (1)).

On sait d'après le cours que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme d'e.v.

On en déduit que la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ car elle s'envoie par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ sur la base canonique de $M_{1,n}(\mathbb{K})$.

- b) On peut donner le même argument qu'au a) avec cette fois l'isomorphisme d'e.v. : $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$.

La famille des $(u_{i,j})$ s'envoie sur la base canonique $(E_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{K})$.

C'est donc bien une base.

- 10) a) Soit $x_1, x_2 \in E$ et λ_1, λ_2 dans $\mathbb{K}$. Comme φ est linéaire :

$$u_{\varphi, \varepsilon}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2))\varepsilon$$

et par distributivité pour les scalaires, on conclut bien que :

$$u_{\varphi, \varepsilon}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u_{\varphi, \varepsilon}(x_1) + \lambda_2 u_{\varphi, \varepsilon}(x_2).$$

Donc $u_{\varphi, \varepsilon} \in \mathcal{L}(E)$.

De manière évidente, pour tout $x \in E$, $u_{\varphi, \varepsilon}(x) \in \text{Vect}(\varepsilon)$ donc $\text{Im}(u_{\varphi, \varepsilon}) \subset \text{Vect}(\varepsilon)$.

D'autre part comme $u_{\varphi, \varepsilon}$ n'est pas l'application nulle car φ n'est pas l'application nulle, $\text{Im}(u_{\varphi, \varepsilon})$ est de dim. au moins 1, ce qui donne l'égalité :

$$\text{Im}(u_{\varphi, \varepsilon}) = \text{Vect}(\varepsilon).$$

De même on a trivialement $\ker(\varphi) \subset \ker(u_{\varphi, \varepsilon})$ et comme de même $\ker(u_{\varphi, \varepsilon})$ n'est pas égal à E entier et que $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E , on conclut que :

$$\ker(u_{\varphi, \varepsilon}) = \ker(\varphi)$$

- b) On remarque que pour chaque (i, j) , on a l'égalité : $u_{i,j} = u_{e_j^*, e_i}$.

En effet dans la déf. des $u_{i,j}$ donnée dans l'énoncé, on a : $\forall x \in E$, $u_{i,j}(x) = e_j^*(x)e_i$.

- c) On va montrer que $u_{i,j}$ est un projecteur ssi $i = j$. Plus généralement, on va montrer que $u_{\varphi, \varepsilon}$ est un projecteur ssi $\varphi(\varepsilon) = 1$ ce qui donne en particulier le résultat pour les $u_{i,j}$ puisque $e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}$.

Pour cela, on peut utiliser la caractérisation : p est un projecteur ssi $p \circ p = p$.

Ici pour chaque $x \in E$, $(u_{\varphi, \varepsilon} \circ u_{\varphi, \varepsilon})(x) = \varphi(\varphi(x)\varepsilon)\varepsilon = \varphi(x)\varphi(\varepsilon)\varepsilon$ (*).

On voit donc déjà que si $\varphi(\varepsilon) = 1$, on a bien $(u_{\varphi, \varepsilon} \circ u_{\varphi, \varepsilon}) = u_{\varphi, \varepsilon}$.

Réciproquement, si on suppose que $u_{\varphi, \varepsilon}$ est un projecteur et si on choisit un $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, avec (*), on a $\varphi(x)\varphi(\varepsilon)\varepsilon = \varphi(x)\varepsilon$ et comme $\varepsilon \neq 0$ et $\varphi(x) \neq 0$, on conclut que $\varphi(\varepsilon) = 1$. $\square$

- 11) le sens facile est le sens $\Leftarrow$: on a vu au 10 a) que $u_{\varphi, \varepsilon}$ est de rang 1, d'image $\mathbb{K}\varepsilon$.

Sens $\Rightarrow$: soit u de rang 1. Soit ε tel que $\text{Im}(u) = \mathbb{K}\varepsilon$.

Pour chaque $x \in E$, on sait que $u(x) \in \mathbb{K}\varepsilon$ donc il existe bien un scalaire (unique) $\varphi(x)$ tel que $u(x) = \varphi(x)\varepsilon$. Ceci définit bien une application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$. Reste à montrer que φ est linéaire.

Soit $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $u(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y)\varepsilon$ (1).

Mais comme u est linéaire, on a aussi $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda \varphi(x)\varepsilon + \mu \varphi(y)\varepsilon$ (2)

Donc en identifiant (1) et (2), comme $\varepsilon \neq 0$, on a :

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y).$$

- 12) (i) $\Rightarrow$ (iii) Soit p un projecteur de rang 1. Par le 11), comme p est de rang 1, il s'écrit $p = u_{\varphi, \varepsilon}$. Par la question c) (iii), comme p est un projecteur, on sait que $\varphi(\varepsilon) = 1$.
Mieux : en fait, la même question c) (iii) (et l'équivalence du 11) montre l'équivalence entre (i) et (iii).
(ii) $\Rightarrow$ (ii) Soit p un projecteur de rang 1. Soit $q \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ tel que $q \leq p$.
Par propriété vue de l'ordre $\leq$, on sait que $\text{Im } q \subset \text{Im } p$. Or comme $\text{Im } p$ est une droite et que $\text{Im } q$ n'est pas réduit à zéro, on conclut que $\text{Im } q = \text{Im } p$.
De même l'inclusion $\ker p \subset \ker q$ donne $\ker p = \ker q$ car $\ker p$ est un hyperplan et $\ker q \neq E$.
Ainsi p et q sont deux projecteurs ayant même image et même noyau donc $p = q$.
On a bien montré que p est minimal pour $\leq$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) par contraposée : supposons que $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ n'est pas de rang 1. Il est donc de rang au moins deux. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $\text{Im } p$ (avec $r \geq 2$) et $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\ker p$.
Soit q le projecteur sur $\text{Vect}(\varepsilon_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.
On a $q \neq p$.
Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$. Alors $p(x) = \sum_{i=1}^r x_i \varepsilon_i$ et $q(p(x)) = x_1 \varepsilon_1 = q(x)$.
De même $p(q(x)) = q(x)$.
Ainsi $q \leq p$ avec $p \neq q$ donc p n'est pas minimal pour $\leq$.

□

3 Un théorème sur les automorphismes de l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$

- 13) (i) On montre d'abord que A est linéaire :
si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $A(\lambda u + \mu v) = g \circ (\lambda u + \mu v) \circ g^{-1} \stackrel{(*)}{=} \lambda A(u) + \mu A(v)$, l'égalité $(*)$ étant vraie car $\circ$ est bilinéaire.
(ii) Il est immédiat que $A(\text{id}) = \text{id}$ car $g \circ \text{id} \circ g^{-1} = \text{id}$.
(iii) Enfin $A(u) \circ A(v) = g \circ u \circ g^{-1} \circ g \circ v \circ g^{-1} = g \circ u \circ v \circ g^{-1} = A(u \circ v)$.
Avec (i), (ii), (iii), on sait que A est un morphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
Enfin, A est bijective car l'application $u \mapsto g^{-1} \circ u \circ g$ convient comme réciproque de A .
14) a) Si $p \in \mathcal{P}$ alors $p^2 = p$ donc $A(p^2) = A(p)$ et comme A est un morphisme pour $\circ$, on a $A(p)^2 = A(p)$. Donc $A(p) \in \mathcal{P}$.
Notons aussi que la réciproque est vraie : si $A(p) \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ alors $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ puisque A^{-1} est aussi un morphisme d'algèbres.
b) Si $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ est minimal pour $\leq$ alors $A(p)$ est aussi minimal pour $\leq$.
En effet : si $q \leq A(p)$ alors comme A est bijective, il existe un $q_1 \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ tel que $q = A(q_1)$.
Et la relation $A(q_1) \leq A(p)$ avec $A(q_1) \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ signifie que $A(q_1) \circ A(p) = A(p) \circ A(q_1) = A(q_1)$ et donc via A^{-1} on a $p \circ q_1 = q_1 \circ p = q_1$ et minimalité de p , on conclut que $q_1 = p$ et donc $q = A(p)$ ce qui montre la minimalité de $A(p)$.
c) D'après la question 12, on sait que $u_{i,i} = u_{e_i^*, e_i}$ est minimal pour l'ordre dans $\mathcal{P} \setminus \{0\}$, on sait donc par la question b) précédente que $A(u_{i,i})$ aussi et donc par la question 12 iii), il existe bien ϕ_i et ε_i tels que $A(u_{i,i}) = u_{\phi_i, \varepsilon_i}$ avec en outre $\phi_i(\varepsilon_i) = 1$.
d) Soit $i \neq j$. Comme $A(u_{i,i} \circ u_{j,j}) = A(0) = 0$, on a $A(u_{i,i}) \circ A(u_{j,j}) = 0$.
Donc $u_{\phi_i, \varepsilon_i} \circ u_{\phi_j, \varepsilon_j} = 0$.
En évaluant ces applications sur le vecteur ε_j comme $u_{\phi_j, \varepsilon_j}(\varepsilon_j) = \varepsilon_j$, on obtient $u_{\phi_i, \varepsilon_i}(\varepsilon_j) = 0$.
Donc $\boxed{\text{si } i \neq j, \text{ on a : } \phi_i(\varepsilon_j) = 0}$ car $\varepsilon_i \neq 0$.
Ainsi on a $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\phi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ ($\dagger$).
Montrons que ceci entraîne que les deux familles $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ sont libres.

• On prend une C.L. $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n = 0$.

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on applique ϕ_i à cette égalité, on a $\lambda_i = 0$.

• De même avec une CL $\lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_n \phi_n = 0$ et on applique ε_i .

Remarque : ainsi la relation $(\dagger)$ dit que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ sont deux bases, la seconde étant la duale de la première.

- 15) a) (i) Soit $k \neq j$: $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k, \varepsilon_k} = A(u_{i,j}) \circ A(u_{k,k}) = A(u_{i,j} \circ u_{k,k})$ et comme $j \neq k$, on obtient $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k, \varepsilon_k} = 0$.

Donc en appliquant cette égalité à ε_k , on obtient pour tout $k \neq j$, $A(u_{i,j})(\varepsilon_k) = 0$.

Donc $\ker(A(u_{i,j}) \circ \text{Vect}(\varepsilon_k, k \neq j))$, et comme A est injectif et $u_{i,j} \neq 0$, on sait que $\ker A(u_{i,j})$ n'est pas E entier, d'où l'égalité $\ker(A(u_{i,j})) = \text{Vect}(\varepsilon_k, k \neq j)$ (hyperplan).

(ii) Avec le (i) on sait que $A(u_{i,j})$ est aussi de rang 1.

(iii) D'autre part $A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i}) = A(u_{i,i}) = u_{\phi_i, \varepsilon_i}$.

En appliquant cette égalité au vecteur ε_i , on obtient $A(u_{i,j})(A(u_{j,i})(\varepsilon_i)) = \varepsilon_i$.

Donc $\varepsilon_i \in \text{Im}(A(u_{i,j}))$.

Comme $A(u_{i,j})$ est de rang 1 par le (ii), on sait que $\text{Im}(A(u_{i,j})) = \text{Vect}(\varepsilon_i)$.

- b) Par ce qui précède $A(u_{i,j})$ et $u_{\phi_i, \varepsilon_i}$ ont le même noyau de dim $n-1$: $\text{Vect}(\varepsilon_k, k \neq j)$.

Comme $\text{Im}(A(u_{i,j})) = \text{Vect}(\varepsilon_i)$, on a bien un $\lambda \in K$ tel que $A(u_{i,j})(\varepsilon_j) = \lambda \varepsilon_i$.

Suivant l'énoncé, on note ce λ avec les indices : $\lambda_{i,j}$.

Mais alors les deux A.L. $A(u_{i,j})$ et $\lambda_j u_{\phi_j, \varepsilon_i}$ coïncident sur la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ donc sont égales.

- c) $\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{j,k} u_{\phi_j, \varepsilon_i} \circ u_{\phi_k, \varepsilon_j} = A(u_{i,j} \circ u_{j,k}) = A(u_{i,k}) = \lambda_{i,k} u_{\phi_k, \varepsilon_i}$.

En appliquant cette égalité à ε_k , on a bien la relation $\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.

- 16) (i) Pour chaque $i = 1, \dots, n$, on note $\alpha_i = \lambda_{i,1} \varepsilon_i$ (le choix de l'indice 1 est arbitraire ici comme on va le voir ci-dessous).

Comme les nombres $\lambda_{i,1}$ sont tous non nuls et que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E , on sait que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une base de E .

(ii) On sait que $\phi_1, \dots, \phi_n$ est la base duale de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ par 14 d). Montrons que la base duale de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est la famille $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ où $\alpha_i^* = \frac{1}{\lambda_{i,1}} \phi_i$.

Il s'agit de montrer que pour tout (i, j) , $\alpha_j^*(\alpha_i) = \delta_{i,j}$ (*).

Or pour $i \neq j$, c'est évident car $\phi_j(\varepsilon_i) = 0$ et si $i = j$, $\alpha_i^*(\alpha_i) = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{i,1}} \phi_i(\varepsilon_i) = 1$.

Ainsi on a bien montré (*).

(iii) Montrons que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$.

Par le 15) b) on sait que $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\phi_j, \varepsilon_i}$ (1).

Or pour chaque $x \in E$, par notre définition des α_i on sait que :

$$u_{\alpha_j^*, \alpha_i}(x) = \alpha_j^*(x) \alpha_i = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}} \phi_j(x) \varepsilon_i \quad (2).$$

Par la relation du 15 c), on sait que $\frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}} = \lambda_{i,j}$, et on en déduit avec (2) que :

$$\forall x \in E, u_{\alpha_j^*, \alpha_i}(x) = \lambda_{i,j} \phi_j(x) \varepsilon_i \quad (3)$$

En comparant (3) et (1) on a bien montré que $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$.

- 17) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_i) = \alpha_i$.

Comme g envoie une base de E sur une base de E , on sait que g est bijective.

L'idée est que pour chaque (i, j) , $A(u_{i,j})$ agit sur la base des $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ comme $u_{i,j}$ agit sur la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Ceci va se traduire par la relation $A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$.
L'opération $g \circ \square \circ g^{-1}$ « transporte l'action d'une base sur l'autre » ...

Montrons l'affirmation du cartouche ci-dessus :

Soit $x \in E$. On le décompose en $x = \sum_{k=1}^n x_k \alpha_k$ sur la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Alors on sait par la question précédente que $A(u_{i,j})(x) = x_j \alpha_i$ (1).

D'autre part : $g^{-1}(x) = \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon_k$ et donc $u_{i,j}(g^{-1}(x)) = x_j \varepsilon_i$.

Finalement $g(u_{i,j}(g^{-1}(x))) = x_j \alpha_i$ (2).

En comparant (1) et (2), on a bien montré que $A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$ comme annoncé.

Enfin notons $B : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}$.

Par la question précédente, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $A(u_{i,j}) = B(u_{i,j})$.

Les deux A.L. A et B coïncident sur la base $(u_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ de $\mathcal{L}(E)$ donc sont égales partout.