

D.M. 1 MP : solutions

Q1) Il suffit d'utiliser la formule

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Ici $\cos(k\omega t + \varphi_k) = \cos(k\omega t)\cos(\varphi_k) - \sin(k\omega t)\sin(\varphi_k)$.

Ainsi, pour chaque $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{aligned} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) &= A_k \cos(\varphi_k) \cos(k\omega t) - A_k \sin(\varphi_k) \sin(k\omega t), \\ &= a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t), \end{aligned}$$

en posant $a_k = A_k \cos(\varphi_k)$ et $b_k = -A_k \sin(\varphi_k)$.

Q2) Réciproquement :

- si $a_k = b_k = 0$, on pose $A_k = 0$ et φ_k quelconque, qui conviennent.
- sinon

(M1) on pose $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \neq 0$ et on écrit :

$$a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = A_k \left(\frac{a_k}{A_k} \cos(k\omega t) + \frac{b_k}{A_k} \sin(k\omega t) \right) \quad (*)$$

Comme le couple $(x, y) := (\frac{a_k}{A_k}, \frac{-b_k}{A_k})$ vérifie $x^2 + y^2 = 1$, on sait (théorème de paramétrage du

cercle unité) qu'il existe un (unique) $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2[$ tel que $\begin{cases} a_k/A_k = \cos(\theta), \\ -b_k/A_k = \sin(\theta) \end{cases}$.

En notant $\theta = \varphi_k$ et en remplaçant dans $(*)$ on a :

$$a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = A_k (\cos(\varphi_k) \cos(k\omega t) - \sin(\varphi_k) \sin(k\omega t)) = A_k \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

(M2) en complexe

$$\begin{aligned} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) &= a_k \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) + b_k \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} ((a_k - ib_k)e^{it} + (a_k + ib_k)e^{-it}) \end{aligned}$$

En notant $z_k = a_k - ib_k$, et en écrivant $z_k = A_k e^{i\varphi_k}$ (écriture module et argument avec $A_k, \varphi_k \in \mathbb{R}$), on a

$$a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = \frac{1}{2} (A_k e^{i(t+\varphi_k)} + A_k \overline{e^{i(t+\varphi_k)}}) = A_k \cos(t + \varphi_k)$$

Remarque : Une formule de calcul de φ_k utile pour la physique (non demandée ici). On cherche ici à « calculer » le représentant (mod. 2π) de φ_k dans $[-\pi/2, 3\pi/2]$:

- Si $a_k \neq 0$, $\tan(\varphi_k) = -b_k/a_k$ donc $\varphi_k \equiv \text{Arctan}(-b_k/a_k) \pmod{\pi}$ mais pour vraiment déterminer φ_k on regarde si le représentant de φ_k dans $[-\pi/2, 3\pi/2]$ est dans $[-\pi/2, \pi/2]$ ou bien dans $[\pi/2, 3\pi/2]$ ce qui est donné par le signe de $\cos(\varphi_k)$:
 - Si $a_k > 0$, $\cos(\varphi_k) = a_k/A_k > 0$ et donc $\varphi_k \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\varphi_k = \text{Arctan}(-b_k/a_k)$
 - Si $a_k < 0$, $\cos(\varphi_k) = a_k/A_k < 0$ et donc $\varphi_k \in]\pi/2, 3\pi/2[$ et $\varphi_k = \text{Arctan}(-b_k/a_k) + \pi$
- Si $a_k = 0$, $\cos(\varphi_k) = 0$ donc $\varphi_k = \pm\pi/2$ et le signe est donnée par $\sin(\varphi_k) = -b_k/|b_k|$ donc si $b_k > 0$, $\varphi_k = -\pi/2$ et si $b_k < 0$, $\varphi_k = \pi/2$.

Q3) Par déf. $\mathcal{P}_\omega$ est l'ensemble des fonctions f qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions co_k et sin_k .

Soit donc $f \in \mathcal{P}_\omega$. En remarquant que co_0 est la fonction constante égale à 1 et si_0 est la fonction nulle, en notant N le plus grand des k tels que co_k ou si_k apparaissent dans l'écriture de f , on a bien une écriture de la forme (2) pour f .

La réciproque est immédiate : toutes les fonctions de la forme (2) sont C.L. des fonctions co_k et si_k pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Q4) On veut montrer que $\Phi : (f, g) \mapsto (f|g)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On va d'abord montrer (i), (ii), (iii) que Φ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(i) Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(f, g) \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\int_0^T f(t)g(t)dt = \int_0^T g(t)f(t)dt$, donc Φ est une symétrie.

(ii) Avec (i), pour montrer que Φ est bilinéaire, il suffit de montrer que Φ est linéaire à gauche. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(f_1, f_2, g) \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R})$, on a :

$$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \frac{1}{T} \int_0^T (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \cdot g$$

Par linéarité du produit à droite par g et par linéarité de l'intégration, on obtient que :

$$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \frac{\lambda_1}{T} \int_0^T f_1 g + \frac{\lambda_2}{T} \int_0^T f_2 g = \lambda_1 \Phi(f_1, g) + \lambda_2 \Phi(f_2, g)$$

ce qui montre la linéarité à gauche de Φ et donc sa bilinéarité par symétrie.

(iii) Soit $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $\Phi(f, f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \geq 0$ par positivité de f^2 et de l'intégrale.

(iv) Montrons le caractère *défini* de Φ sur $\mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit d'abord $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^T f^2 = 0$.

Montrons alors que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f = 0$.

Comme f est continue par morceaux, on sait que ces limites à droite et à gauche existent en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$.

Par l'absurde supposons qu'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que par exemple $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \neq 0$ (raisonnement identique avec la limite à droite).

Par T -périodicité, on peut choisir $t_0 \in]0, T]$.

Alors $f(t)^2 \xrightarrow[t \rightarrow t_0^-]{} \ell > 0$.

Par la définition de la limite, on a un $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0 - \alpha, t_0[$, $f(t)^2 \geq \ell/2$.

Quitte à diminuer α , on suppose que $[t_0 - \alpha, t_0] \subset [0, T]$.

Alors en intégrant l'inégalité précédente $\int_{t_0-\alpha}^{t_0} f(t)^2 dt \geq \alpha\ell/2$.

Et par positivité de f^2 , on a $\int_0^T f(t)^2 dt \geq \int_{t_0-\alpha}^{t_0} f(t)^2 dt \geq \alpha\ell/2 > 0$.

Mais ceci est une *contradiction* avec le fait que cette intégrale est supposée nulle.

Conclusion : on a montré que si $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie $\Phi(f, f) = 0$ alors f a une limite à gauche et à droite nulle en tout point. Si en plus $f \in \mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on conclut bien que f est nulle puisqu'en tout point $f(t_0)$ est la moyenne de sa limite à gauche et de sa limite à droite.

Ainsi avec (i), (ii), (iii), (iv) on conclut bien que Φ est un produit scalaire dans $\mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En revanche dans $\mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on peut considérer des fonctions f nulles partout sauf en un nombre fini de points de $[0, T]$ et T -périodiques, qui vérifient bien $\Phi(f, f) = 0$ mais $f \neq 0$.

Q5) Trois calculs :

- Pour tout t, k, l : $\cos(k\omega t) \cos(l\omega t) = \frac{1}{2} (\cos((k+l)\omega t) + \cos((k-l)\omega t))$.

Donc pour $k \neq l$, $\int_0^T \cos(k\omega t) \cos(l\omega t) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((k+l)\omega t)}{(k+l)} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((k-l)\omega t)}{(k-l)} \right]_0^T$ (où $k+l$ et $k-l$ sont non nuls car k, l sont dans $\mathbb{N}$ et *distincts*).

Comme k, l sont des entiers, $\sin((k+l)\omega T) = \sin(2\pi(k+l)) = 0$ et de même $\sin((k-l)\omega T) = 0$.

On conclut que $\boxed{\text{pour } k \neq l, (co_k | co_l) = 0}$.

- $\cos(k\omega t) \sin(l\omega t) = \frac{1}{2} (\sin((l+k)\omega t) + \sin((l-k)\omega t))$.

Si $k \neq l$, on a : $\int_0^T \cos(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos((l+k)\omega t)}{l+k} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos((l-k)\omega t)}{l-k} \right]_0^T = 0$

Donc $\boxed{\text{pour tout } k \neq l, (co_k | si_l) = 0}$.

Si $k = l$, on a seulement $\int_0^T \cos(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos((l+k)\omega t)}{l+k} \right]_0^T = 0$

Donc là aussi, $\boxed{\text{pour tout } k, (co_k | si_k) = 0}$.

- Enfin on montre de même que tout $k \neq l$, $(si_k | si_l) = 0$.

Q6) Par définition de $\mathcal{P}_\omega$, cette famille est génératrice de $\mathcal{P}_\omega$. D'autre part, par la question précédente, c'est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls donc une famille libre. On conclut bien que c'est une base de $\mathcal{P}_\omega$ puisque libre et génératrice.

Q7) Comme l'écriture (2) est l'écriture de s comme C.L. des vecteurs d'une base orthogonale de $\mathcal{P}_\omega$, on sait par le cours que les coefficients a_k et b_k de cette écriture se calculent comme suit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = \frac{(s | co_k)}{\|co_k\|^2} \quad b_k = \frac{(s | si_k)}{\|si_k\|^2}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, comme

$$\forall u \in \mathbb{R}, \cos^2(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u)$$

on calcule :

$$\|co_k\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(k\omega t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \frac{dt}{2} + \int_0^T \frac{\cos(2k\omega t)}{2} dt \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4kT} [\sin(2k\omega t)]_0^T = \frac{1}{2}$$

Ainsi on trouve bien comme demandé que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = 2(s | co_k) = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(kt) dt$$

La formule annoncée pour b_k s'obtient de la même manière avec la linéarisation :

$$\sin^2(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2u).$$

Reste le cas particulier de $A_0 = \frac{(s | co_0)}{\|co_0\|^2}$ car $co_0 = 1$.

Or $\|co_0\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T 1 = 1$. Donc $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) 1 dt$ et donc $A_0 = a_0/2$ avec la définition de a_0 donnée dans l'énoncé, qui permet une formule unifiée pour tous les a_k pour $k \in \mathbb{N}$.

Q8) D'après la Q6 la famille $((co_k)_{k \in [0, N]}, (si_k)_{k \in [1, N]})$ est une base orthogonale de $\mathcal{P}_{\omega, N}$.

Donc d'après la formule sur la projection orthogonale sur un s.e.v. dont on connaît une base orthogonale, on sait que le projeté orthogonal $\pi(f)$ sur $\mathcal{P}_{\omega, N}$ s'écrit :

$$\pi(f) = \frac{(f | co_0)}{\|co_0\|^2} + \sum_{k=1}^N \frac{(f | co_k)}{\|co_k\|^2} + \frac{(f | si_k)}{\|si_k\|^2}.$$

Or d'après le calcul de la Q7 ces produits scalaires et ces normes correspondent exactement à l'écriture de $S_N(f)$.

Ainsi : $\pi(f) = S_N(f)$.

Q9) Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $\int_c^{c+T} f = \int_c^0 f + \int_0^T f + \int_T^{c+T} f$ (1)

Dans la dernière intégrale, on fait un changement de variable : $\int_T^{c+T} f(t)dt = \int_0^c f(u+T)du$,

en posant $t = u + T$. Comme f est T -périodique, on obtient donc $\int_T^{c+T} f(t)dt = \int_0^c f(u)du$,

En remplaçant dans (1) les deux termes extrêmes s'éliminent et on obtient bien :

$$\int_c^{c+T} f = \int_0^T f$$

ce qui est la première égalité demandée. La seconde s'obtient alors avec $c = -T/2$.

Q10) Avec la question précédente, la définition de $b_k(f)$ s'écrit aussi :

$$b_k(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(kt) dt$$

Comme f est paire, $t \mapsto f(t) \sin(kt)$ est une fonction impaire, donc son intégrale sur $[-T/2, T/2]$ est nulle donc $b_k(f) = 0$.

Q11) Si f est impaire, de même pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(kt) dt = 0$$

comme intégrale sur $[-T/2, T/2]$ d'une fonction impaire.

Q12) La relation de l'énoncé dit que pour tout $u \in \mathbb{R}$ les points du graphe d'abscisse $T/4 + u$ et $T/4 - u$ ont la même ordonnée, donc que le graphe est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = T/4$.

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par imparité de f et donc parité de $t \mapsto f(t) \sin(2k\omega t)$

$$b_{2k}(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(2k\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(2k\omega t) dt$$

Dans cette dernière intégrale, on pose $u = t - T/4$, on obtient :

$$b_{2k}(f) = \frac{4}{T} \int_{-T/4}^{T/4} f(u + T/4) \sin(2k\omega u + k\pi) du$$

sous cette forme l'intégrande $u \mapsto f(u + T/4) \sin(2k\omega u + k\pi)$ est une fonction *impaire* donc d'intégrale nulle sur $[-T/4, T/4]$.

On a bien montré que $b_{2k}(f) = 0$.

Q13) La fonction f est impaire donc les $a_k(f)$ sont tous nuls par la Q 11.

De même l'axe d'équation $x = T/4$ est axe de symétrie donc les $b_{2k}(f)$ sont nuls aussi.

On calcule donc les $b_{2k+1}(f)$ avec la formule :

$$\begin{aligned} b_{2k+1}(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin((2k+1)\omega t) dt, \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin((2k+1)\omega t) dt - \frac{2}{T} \int_{T/2}^T \sin((2k+1)\omega t) dt \\ &= \frac{2}{(2k+1)\omega T} \left([-\cos((2k+1)\omega t)]_0^{T/2} + [\cos((2k+1)\omega t)]_{T/2}^T \right) \\ &= \frac{1}{(2k+1)\pi} (-\cos((2k+1)\pi) + 1 + \cos((2k+1)2\pi) - \cos((2k+1)\pi)) \\ &= \frac{4}{(2k+1)\pi} \end{aligned}$$

Q14) Avec 1000 points sur $[-4, 4]$ et une figure pour chaque valeur de N , soit le code suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def S(N,x):
    somme=0
    for k in range(1,2*N+3,2):# que des impairs
        bk=4/(k*np.pi)
        somme=somme+bk*np.sin(2*np.pi*k*x)
    return somme

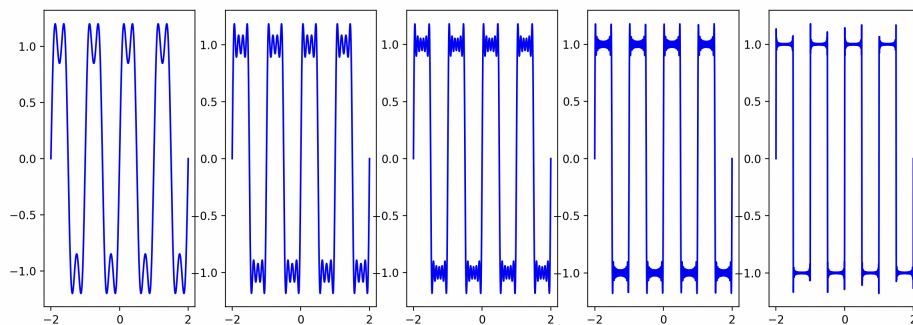
X=np.linspace(-4,4,1000)
for N in [1,3,5,11,49]:
    Y=[]
    plt.figure()
    for x in X :
        Y.append(S(N,x))
    plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

ou encore, en remplaçant les différentes figures par un `subplot` :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def S(N,x):
    somme=0
    for k in range(1,2*N+3,2):# que des impairs
        bk=4/(k*np.pi)
        somme=somme+bk*np.sin(2*np.pi*k*x)
    return somme

X=np.linspace(-2,2,1000)
N=[1,3,5,11,49]
for i in range(len(N)):
    Y=[]
    plt.subplot(1,5,i+1)
    for x in X :
        Y.append(S(N[i],x))
    plt.plot(X,Y,'b')
plt.show()
```

avec le résultat suivant :



Q15) Une suite de fonctions continues ne peut pas converger uniformément vers une fonction discontinue.

Q16) Cette fois f est paire donc les $b_k(f)$ sont nuls. On calcule les $a_k(f)$ sachant que pour $t \in [0, T/2]$ la fonction est définie par $t \mapsto (1 - \frac{4}{T}t)$.

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} (1 - \frac{4}{T}t) \cos(k\omega t) dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \cos(k\omega t) dt - \frac{16}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(k\omega t) dt \\ &= \frac{4}{T} \left[\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} \right]_0^{T/2} - \frac{16}{T^2} \left[\frac{t \sin(k\omega t)}{k\omega} \right]_0^{T/2} + \frac{16}{T^2} \int_0^{T/2} \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} dt \end{aligned}$$

par intégration par partie. Dans le dernier membre les deux premiers termes sont nuls car $k\omega T/2 = k\pi$ et $\sin(k\pi) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{16}{T^2} \int_0^{T/2} \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} dt = -\frac{16}{T^2} \left[\frac{\cos(k\omega t)}{k^2\omega^2} \right]_0^{T/2} \\ &= -\frac{16}{k^2\omega^2 T^2} (\cos(k\pi) - 1) \end{aligned}$$

Si k est pair, on trouve que $a_k = 0$ (ce qu'on aurait pu trouver par un argument de symétrie analogue à celui qui avait donné $b_{2k} = 0$ dans l'exemple précédent), et pour les impairs :

$$a_{2k+1} = \frac{32}{(2k+1)^2(2\pi)^2} = \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Q17) Cette fois les tracés convergent plus vite vers un signal très proche du triangulaire même si les $S_N(f)$ sont dérivables alors que f a des points anguleux.

Q18) Soit $n \in \mathbb{N}$

• Par définition $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)(\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)) dt$.

On en déduit par linéarité de l'intégrale, que

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \quad (*)$$

Remarquons que $c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2} = A_0$.

• De même, par parité de sinus et cosinus :

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)(\cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)) dt = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)) \quad (**)$$

En mettant à part $c_0 = a_0/2$, on découpe la somme en deux :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{in\omega t} &= \sum_{n=-N}^{-1} c_n(f) e^{in\omega t} + \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N c_n(f) e^{in\omega t} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (c_n(f) e^{in\omega t} + c_{-n}(f) e^{-in\omega t}), \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (c_n(f)(\cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)) + c_{-n}(f)(\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t))) \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(n\omega t) + (c_n(f) - c_{-n}(f)) i \sin(n\omega t) \quad (***) \end{aligned}$$

Or avec (*) et (**), on a :

$$\begin{aligned} c_n(f) + c_{-n}(f) &= a_n(f) \\ c_{-n}(f) - c_n(f) &= ib_n(f) \end{aligned}$$

ce qui dans $(***)$ donne bien :

$$\sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{in\omega t} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^N a_k(f) \cos(k\omega t) + b_k(f) \sin(k\omega t)$$

Q19) a) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) &= \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{in\omega t} \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{T} \int_0^T f(u) e^{-in\omega u} du e^{in\omega t} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{n=-N}^N f(u) e^{-in\omega u} e^{in\omega t} \right) du \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale. Avec la notation $D_N(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{in\omega s}$ de l'énoncé, on obtient bien :

$$S_N(t) = \int_0^T f(u) D_N(t-u) du$$

La seconde formule s'obtient par changement de variable $s = t - u$ qui donne $ds = -du$ et

$$S_N(t) = \int_t^{t-T} f(t-s) D_N(s) (-ds) = \int_{t-T}^t f(t-s) D_N(s) ds = \int_0^T f(t-s) D_N(s) ds$$

la dernière égalité par Q9 appliquée à la fonction T -périodique $s \mapsto f(t-s) D_N(s)$.

b) La somme qui apparaît dans D_N est la somme de $(2N+1)$ termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\omega s}$.

(i) Si $s \in T\mathbb{Z}$, ils sont tous égaux à 1, d'où $D_N(s) = (2N+1)/T$.

(ii) Sinon, on a $e^{i\omega s} \neq 1$, de sorte que

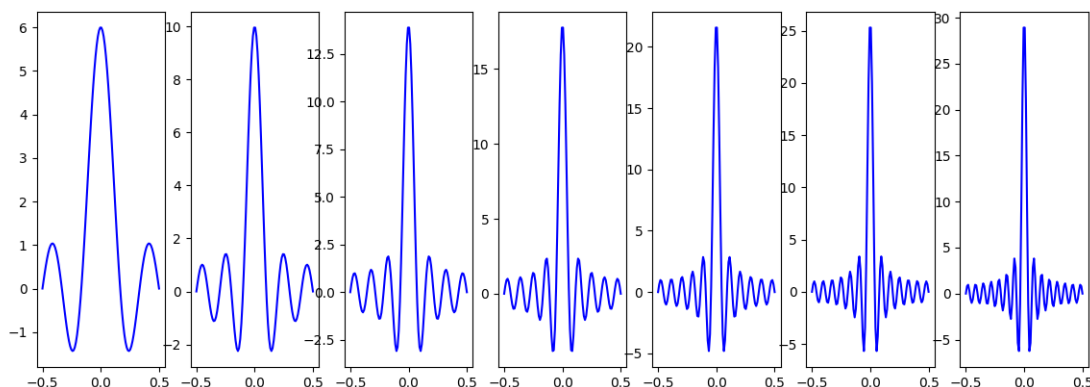
$$\begin{aligned} D_N(s) &= \frac{1}{T} e^{-\omega i N s} \frac{1 - e^{\omega i (2N+1)s}}{1 - e^{\omega i s}} \\ &= \frac{1}{T} e^{-\omega i N s} \frac{e^{i \frac{2N+1}{2} \omega s} (-2i \sin(\frac{2N+1}{2} \omega s))}{e^{i \omega s / 2} (-2i \sin(\omega s / 2))} \\ &= \frac{1}{T} \exp\left(\frac{-2N + (2N+1) - 1}{2} i s \omega\right) \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \omega s)}{\sin(\omega s / 2)} \\ &= \frac{1}{T} \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} s \omega)}{\sin(s \omega / 2)} \end{aligned}$$

c) Avec un code sensiblement identique aux précédents :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
T=1
omega=2*np.pi/T
def D(N,x):
    if x!=0:
        return 1/T * np.sin((2*N+1)*omega*x)/np.sin(omega*x/2)
    else :
        return 2*N+1
X=np.linspace(-1/2,1/2,102)
for N in range(1,8):
    Y=[]
```

```
plt.subplot(1,7,N)
for x in X :
    Y.append(D(N,x))
plt.plot(X,Y,'b')
plt.show()
```

On obtient :



Q20) Il s'agit de *linéariser* ces fonctions, c'est-à-dire de les écrire comme combinaison linéaire des fonctions co_k et si_k .

(M1) (i) Si on ne sait pas la formule par coeur pour $\cos^2$ on peut commencer en sens inverse avec la formule sur $\cos(a+b)$:

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$$

ce qui montre bien que $\cos^2 \in \text{Vect}(1, co_2) \subset \mathcal{P}$.

(ii) Il est bon de savoir par coeur que $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ donc ici

$$(t \mapsto \sin(t)\cos(t)) = \frac{1}{2}si_2 \in \mathcal{P}$$

(iii) Comme au (i) en partant de $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t)$, on obtient que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$$

donc

$$\sin^2 \in \text{Vect}(1, co_2) \in \mathcal{P}$$

(M2) on peut aussi appliquer pour chacun des calculs précédent la formule d'Euler (« Léonard linéarise ») comme on va le faire à la question suivante.

Q21) Avec les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos^3(\theta) \sin(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) = \frac{1}{16i} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{16i} (e^{4i\theta} + 3e^{2i\theta} + 3 + e^{-2i\theta} - e^{2i\theta} - 3 - 3e^{-2i\theta} - e^{-4i\theta}) \\ &= \frac{1}{16i} (2i \sin(4\theta) + 4i \sin(2\theta)) = \underline{\underline{\frac{1}{8} \sin(4\theta) + \frac{1}{4} \sin(2\theta)}} \end{aligned}$$

Q22) Via la formule d'Euler puis la formule du binôme :

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} (e^{ix} + e^{-ix})^n = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x} \right) = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} \right) \quad (1)$$

Ici $n = 2p$ et on sépare la dernière somme en deux sommes :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} = \underbrace{\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}}_S + \underbrace{\sum_{k=p+1}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}}_{S'} \quad (2).$$

Dans S' , on effectue le changement d'indice $l = n - k \Leftrightarrow k = n - l$.

On obtient, compte-tenu de la symétrie des binomiaux, $S' = \sum_{l=0}^{p-1} \binom{n}{l} e^{i(n-2l)x}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} &= \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}}_S + \binom{n}{p} + \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} e^{-i(2k-n)x}}_{S'} \\ &= \binom{n}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} 2 \cos((2k-n)x). \quad (3) \end{aligned}$$

Avec les formules (1) et (3), pour $n = 2p$, $\cos^{2p}(x) = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} + \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=1}^p \binom{2p}{k} \cos((2p-2k)x)$.

Ce qui montre bien que $\cos^n \in \mathcal{P}$.

Q23) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) &= \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^n), \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) i^k \sin^k(x) \right), \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(x) (-1)^p \sin^{2p}(x), \text{ en ayant posé } k = 2p, \text{ avec } i^{2p} = (-1)^p, \end{aligned}$$

Donc $\cos(nx) = P_n(\cos(x), \sin(x))$ où $P_n(X, Y) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} X^{n-2p} (-1)^p Y^{2p}$

Ceci montre bien que $(x \mapsto \cos(nx)) \in \mathcal{Q}$.

De même avec :

$$\begin{aligned} \sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx}) &= \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^n), \\ &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) i^k \sin^k(x) \right), \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2p+1} \cos^{n-2p-1}(x) (-1)^p \sin^{2p+1}(x), \text{ en ayant posé } k = 2p+1 \end{aligned}$$