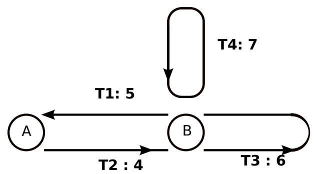
1 Notre petit réseau de transport

Comme (bébé-)exemple, qui servira de fil conducteur dans ces notes, on considère un réseau ferroviaire que l'on décompose en quatre tronçons qu'on numérotera T1,...,T4.



Le tronçon **T1** va de la gare B à la gare A, tandis que **T2** fait l'inverse. Le tronçon 3 va de B à B en desservant d'autres gares qu'on n'a pas fait figurer car elles n'auront pas de rôle dans notre étude. Il en va de même pour **T4**.

En revanche, par rapport à un simple graphe orienté, la représentation choisie veut mettre en évidence le fait qu'il y a deux *lignes* de trains. Sur la première : les trains circulent en empruntant successivement les tronçons **T1,T2,T3** et s'arrêtent entre chaque tronçon. La seconde ligne est composée du seul tronçon **T4**.

La gare B sera alors vue comme une gare *d'échange* : les passagers doivent pouvoir y passer de ligne 1 à la ligne 2 et inversement.

Sur la figure, le nombre qui suit chaque numéro de tronçon donne la durée (supposée fixe) du trajet sur ce tronçon. Ainsi sur **T1** la durée est de 5 unités de temps, etc. Ensuite, on notera a_i la durée du trajet sur le tronçon **Ti** de sorte que, ici, $a_1 = 5$, $a_2 = 4$ etc.

Le but de ce travail est d'expliquer une méthode pour obtenir les meilleures (en un sens à préciser) tables d'horaires pour un certain nombre de trains roulant sur de tels réseaux de trains, dont celui-ci n'est qu'un exemple très simple [1], puis de donner les justifications théoriques de la méthode suivie.

2 Explicitation des contraintes

On fixe une origine des dates $t = 0$.

La table horaire doit donner pour chaque tronçon $i = 1, \dots, 4$ la date de tous les départs sur ce tronçon, dans l'ordre chronologique. On définit donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_1(k)$ comme la *date* du k-ième départ sur le tronçon **T1**. De même, on définit $x_2(k), \dots, x_4(k)$.

On s'intéresse donc à la fonction vectorielle :

$$x : k \in \mathbb{N}^* \mapsto x(k) = (x_1(k), \dots, x_4(k)) \in \mathbb{R}^4.$$

1. Dans [Ol], ce type de raisonnement est appliqué au réseau *intercity* néerlandais.

2.1 L'initialisation

Les dates des premiers départs i.e. les coordonnées du vecteur $x(1)$ sont soumises à des contraintes différentes suivant le nombre de trains sur le réseau.

Si on dispose par exemple de trois trains sur la ligne 1 et d'au moins un sur la ligne 2, on peut choisir d'un faire partir un sur chaque tronçon au temps zéro, et donc avoir : $x(1) = (0, 0, 0, 0)$.

En revanche, si par exemple on n'a qu'un train sur la ligne 1, on peut toujours fixer $x_1(1) = 0$, mais ensuite on doit choisir $x_2(1) \geq 5$ et $x_3(1) \geq 5 + 4 = 9$ parce que pour partir sur le tronçon 2 (resp. le tronçon 3) le train parti au temps zéro sur T1 doit déjà être arrivé en A (resp en B après avoir parcouru T1 et T2).

Par exemple $x(0) = (0, 5, 10, 0)$ serait une initialisation correcte.

Noter que $x_2(0) = 5$ signifie que le train repart sur T2 aussitôt après son arrivé de T1 (on parle de *fonctionnement au plus tôt).*

2.2 La première contrainte :

Cette contrainte est la simple traduction du fait que pour partir d'un endroit, un train doit déjà y être arrivé.

La discussion précédente se généralise pour dire que la date $x_i(k+1)$ du $k+1$-ième départ sur un tronçon $T(i)$ (pour $i \in \{1, 2, 3\}$) est forcément au moins égale à la date $x_{i-1}(k)$ du k-ième départ sur le tronçon $T(i-1)$ où si $i = 1$, $i - 1 = 3$ (ordre cyclique)) à laquelle on doit ajouter la durée a_{i-1} du parcourt sur $T(i-1)$ Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(C_1) \left\{ \begin{array}{lcl} x_2(k+1) & \geq & a_1 + x_1(k) = 5 + x_1(k), \\ x_3(k+1) & \geq & a_2 + x_2(k) = 4 + x_2(k), \\ x_1(k+1) & \geq & a_3 + x_3(k) = 6 + x_3(k). \\ x_4(k+1) & \geq & a_4 + x_4(k) = 7 + x_4(k). \end{array} \right.$$

(Par exemple, même si $x_1(1) = x_2(1) = 0$ i.e. il y a deux trains l'un qui part sur T1 au temps zéro, l'autre sur T2, alors $x_2(2) \geq 5$ nécessairement).

2.3 Contraintes de coordinations

Les voyageurs qui voyagent sur le réseau aimeraient qu'un train avant de partir puisse attendre un autre en correspondance. On fixe par exemple que :

- le $k+1$-ème train partant sur T1 attend le k-ème train arrivant de T4,
- le $k+1$-ème train partant sur T4 attend le k-ème train arrivant de T3,
- le $k+1$-ème train partant sur T4 attend le k-ème train arrivant de T2,
- le $k+1$-ème train partant sur T3 attend le k-ème train arrivant de T4.

Ces contraintes donnent le système :

$$(C_2) \left\{ \begin{array}{lcl} x_1(k+1) & \geq & a_4 + x_4(k), \\ x_4(k+1) & \geq & a_3 + x_3(k), \\ x_4(k+1) & \geq & a_2 + x_2(k), \\ x_3(k+1) & \geq & a_4 + x_4(k). \end{array} \right.$$

2.4 Conjonction des deux types de contraintes

En regroupant les systèmes (C_1) et (C_2) précédents, on obtient :

$$(C)\left\{\begin{array}{lcl} x_1(k+1) & \geq & \max(a_3+x_3(k), a_4+x_4(k)), \\ x_2(k+1) & \geq & a_1+x_1(k), \\ x_3(k+1) & \geq & \max(a_2+x_2(k), a_4+x_4(k)), \\ x_4(k+1) & \geq & \max(a_2+x_2(k), a_3+x_3(k), a_4+x_4(k)). \end{array}\right.$$

On notera $(\widetilde{C})$ le système qui se déduit de (C) en remplaçant les $\geq$ par des $=$. Le système $(\widetilde{C})$ correspond à un *fonctionnement au plus tôt* (on verra que ce n'est pas forcément la "meilleure" solution).

3 Passage à l'algèbre max-plus

Heuristique : *On va voir le système* $(\widetilde{C})$ *du § 2.4, comme un* système linéaire *pour* $(\mathbb{R}, \max, +)$ *On pourra alors utiliser l'outil matriciel pour obtenir des résultats sur ce système.*

Ce qui précède demande quelques précisions :

Définition 3.1. On note $\varepsilon = -\infty$ et on note $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$. On prolonge alors sans surprise les opérations max et + de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}_\varepsilon$ en posant :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_\varepsilon,\ \max(a, \varepsilon) = a, \text{ et } \ a + \varepsilon = \varepsilon.$$

Avant de donner les propriétés des lois max et +, donnons une définition générale (notre référence sur le sujet est [Co])

Définition 3.2. Un ensemble $\mathcal{D}$ muni de deux lois de compositions internes notées $\oplus$ et $\otimes$, qu'on note $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est appelé un *dioide* si, et seulement si :

1. la loi $\oplus$ est associative, commutative, avec un élément neutre qu'on note ε,
2. la loi $\otimes$ est associative, admet un neutre noté e,
3. la multiplication $\otimes$ est distributive par rapport à l'addition $\oplus$,
4. l'élément ε est absorbant pour la multiplication i.e.
   $\forall\, a \in \mathcal{D},\ a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$,
5. l'addition est *idempotente* i.e. $\forall\, a \in A,\ a \oplus a = a$.

Cette définition est taillée sur mesure :

Proposition 3.3. Si, dans $\mathbb{R}_\varepsilon$, on note $\oplus = \max$ et $\otimes = +$, alors $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ est un *dioïde*. Le neutre pour $\oplus$ est $\varepsilon = -\infty$, et le neutre pour $\otimes$ est $e = 0$.

Remarque 3.4. *Pour citer [Co] : l'idempotence de l'addition $\oplus$ est la ligne de démarcation entre les structures algébriques qui nous sont familières et les dioïdes. En fait cette idempotence est intimement liée à une structure d'ordre.*

Avec ces notations le système $(\widetilde{C})$ de § 2.4 devient :

$$(\widetilde{C}) \left\{ \begin{array}{lcl} x_1(k+1) & = & (a_3 \otimes x_3(k)) \oplus (a_4 \otimes x_4(k)), \\ x_2(k+1) & = & a_1 \otimes x_1(k), \\ x_3(k+1) & = & (a_2 \otimes x_2(k)) \oplus (a_4 \otimes x_4(k)), \\ x_4(k+1) & = & (a_2 \otimes x_2(k)) \oplus (a_3 \otimes x_3(k) \oplus (a_4 \otimes x_4(k)). \end{array} \right.$$

Il reste à passer, sans surprise, au langage matriciel :

Propriété-définition 3.5. *Si $(\mathcal{D}, \oplus, \times)$ est un dioïde, Alors :*

(i) *on peut munir l'ensemble $M_{m,n}(\mathcal{D})$ des matrices à coefficients dans $\mathcal{D}$ d'une loi, encore notée $\oplus$, en posant :*

$$\forall\, (A,B) \in M_{m,n}(\mathcal{D})^2,\ \forall\, (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!],\ (A \oplus B)_{i,j} = A_{i,j} \oplus B_{i,j},$$

(ii) *pour tout couple $(A,B) \in M_{m,n}(\mathcal{D}) \times M_{n,p}(\mathcal{D})$ on définit un leur produit $C = A \otimes B$ par :*

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!],\ (A \otimes B)_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{i,k} \otimes B_{k,j}.$$

(iii) *Dans le cas particulier des matrices carrées : $(M_n(\mathcal{D}), \oplus, \otimes)$ est encore un dioïde.*

Propriété 3.6. *En notant $X(k) = {}^t(x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k)) \in M_{4,1}(\mathbb{R})$ le système $(\widetilde{C})$ précédent se réécrit sous la forme :*

$$X(k+1) = A \otimes X(k) \quad (*),$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & a_3 & a_4 \\ a_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & a_2 & \varepsilon & a_4 \\ \varepsilon & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

4 Objectif : la régularité des horaires

Motivation : *Comme on veut pouvoir écrire une table d'horaires* finie, *et mieux encore que les horaires se répètent chaque jour ou mieux encore à chaque heure par exemple, on cherche à fixer un vecteur initial $X(1)$ ayant la propriété qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $X(k+1)$ se déduise de $X(1)$ en ajoutant (au sens usuel) à chaque entrée un nombre fixe.*

Définition 4.1 (La loi externe matricielle)**.** Avec les notations de 3.5, on définit encore la loi de composition externe par : $\forall\, A \in M_{m,n}(\mathcal{D}),\ \forall\ \lambda \in \mathcal{D},\ \ \lambda \otimes A \in M_{m,n}(\mathcal{D})$ vérifie :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!],\ (\lambda \otimes A)_{i,j} = \lambda \otimes A_{i,j}$$

Ainsi, la motivation de *régularité* ci-dessus se traduit par la recherche d'un $k \in \mathbb{N}$ et d'un $\tau\ \in \mathbb{R}$ tels que $X(k+1) = \tau \otimes X(1)$.

Or, à partir de la relation $(*)$ de 3.6, la relation $X(k+1) = \tau \otimes X(1)$ équivaut à :

$$A^{\otimes k} X(1) = \tau \otimes X(1) \quad (**)$$

où on note $A^{\otimes k}$ pour $\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{k\text{ fois}}$.

La régularité maximale est obtenue si $k = 1$, cela conduit naturellement à la :

Définition 4.2. Avec les notations de 3.5 et 4.1, $\lambda \in \mathbb{R}$ est dit *valeur propre* pour la matrice A si, et seulement si, il existe un vecteur X différent du vecteur dont toutes les entrées sont ε tel que $A \otimes X = \lambda \otimes X$.

Un tel vecteur X sera appelé *vecteur propre* de A associé à la λ.

Il est donc naturel de se demander à quelle condition sur la matrice A une telle valeur propre existe, ce que nous étudions au paragraphe suivant.

5 Etude de l'existence des valeurs propres

Graphe de précédence associé à une matrice

Définition 5.1. A toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$, on associe un *graphe pondéré orienté* à n sommets qu'on numérote $1,\ldots,n$, avec la convention que si $a_{i,j} \neq \varepsilon$ alors il y a une flèche de j à i munie du poids $a_{i,j}$ et si $a_{i,j} = \varepsilon$, il n'y a pas de flèche de j à i. Ce graphe s'appelle *graphe de précédence associé à A*. On le notera $\Gamma(A)$.

N.B. – *Dans ce texte, au moins jusqu'au § 7, tous les poids $a_{i,j}$ seront ici des nombres* positifs *ou égaux à ε.*

On remarque facilement que la correspondance ainsi définie entre matrices et graphes est bijective et on parlera inversement de la *matrice de précédence* d'un graphe orienté.

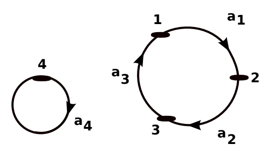
Exemple 5.2. Considérons la matrice A_1 associée au système $(\widetilde{C}_1)$ du § 2.2, où l'on remplace les inégalités par les inégalités. Autrement dit

$$(\widetilde{C}_1) \Leftrightarrow X(k+1) = A_1 \otimes X(k)$$

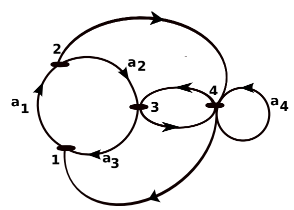
avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & a_3 & \varepsilon \\ a_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & a_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_4 \end{pmatrix}.$$

Alors le graphe de précédence de A_1 est le suivant :



Exemple 5.3. Si on considère la matrice A du 3.6 représentant le même réseau, avec en plus des contraintes de correspondance, on obtient le graphe suivant (sur lequel on a omis des poids pour la lisibilité : en fait, sur un arc partant du sommet i le poids est toujours a_i)



Le langage des graphes

Définition 5.4. Pour un graphe orienté Γ, disons grossièrement qu'un *chemin* de Γ d'origine un sommet s_1 et d'extrémité un sommet s_2 est un sous-graphe de Γ composé de sommets qu'on rencontre *en suivant les flèches* de s_1 à s_2. Un *circuit* est un chemin dont l'origine est égale à l'extrémité. Un *circuit élémentaire* est un circuit sur lequel, à part l'origine et l'extrémité, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

On donne alors les définitions suivantes :

(i) Un graphe orienté est dit *fortement connexe* si, et seulement si, pour tout *couple* de sommets (i, j) du graphe, il existe un chemin de i à j.

(ii)Pour un chemin C d'un graphe pondéré, on appelle *poids du chemin* C, la somme des poids des arêtes le composant. On notera $w(C)$ ce poids.

(iii) Pour un chemin C on appellera *poids moyen du chemin* C et on notera $m(C)$ le quotient :

$$m(C) = \frac{w(C)}{l(C)},$$

où $l(C)$ est la *longueur* du chemin C i.e. le nombre d'arêtes le composant.

Proposition 5.5 (Lien avec les opérations matricielles)**.** (i) Si Γ est le graphe de précédence d'une matrice A, alors pour deux sommets i et j de Γ, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'entrée (i,j) de la matrice $A^{\otimes k}$, si elle est différente de ε est égale exactement au maximum des poids de tous les chemins de longueur k qui vont du sommet j vers le sommet i.

Si cette entrée est égale à ε c'est qu'il n'existe pas de tel chemin.

(ii) Comme conséquence du (i), $(A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^n)_{i,j}$ est égale exactement au maximum des poids de tous les chemins de longueurs plus petite ou égale à n qui vont du sommet j au sommet i.

Preuve du (i) : Pour $k = 2$, $(A^{\otimes 2})_{i,j} = \max_{l=1,\ldots,n}(a_{i,l} + a_{l,j})$ ce qui est bien le poids maximum de tous les chemins de longueur 2 entre j et i. Le cas général s'en déduit, exercice. □

Dans ce qui suit, on s'intéresse au poids moyen maximal dans les circuits d'un graphe $\Gamma(A)$. On commence par énoncer le :

Lemme 5.6. Si un circuit C d'un graphe orienté pondéré *à poids positifs* se décompose en deux circuits (ayant un sommet commun mais pas d'arcs communs) qu'on note C_1 et C_2 alors le poids moyen $m(C)$ vérifie :

$$m(C) \leq \max(m(C_1), m(C_2))$$

Preuve – Notons $a_1, \ldots, a_r$ les poids des arcs de C_1 et $b_1, \ldots, b_s$ ceux de C_2, on veut montrer que :

$$\frac{a_1 + \cdots + a_r + b_1 + \cdots + b_s}{r+s} \leq \max\left(\frac{a_1 + \cdots + a_r}{r}, \frac{b_1 + \cdots + b_s}{s}\right)$$

Or, en notant $A = a_1 + \cdots + a_r$ et $B = b_1 + \cdots + b_s$, on reconnaît le membre de droite de l'encadrement bien connu :

$$\min\left(\frac{A}{r}, \frac{B}{s}\right) \leq \frac{A+B}{r+s} \leq \max\left(\frac{A}{r}, \frac{B}{s}\right),$$

valable pour tout quadruplet $(A, B, r, s) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. □

Proposition 5.7 (Formule du poids moyen maximal sur les circuits)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$. Le poids moyen maximum de tous les circuits de $\Gamma(A)$ est égal à λ où :

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{\mathrm{MaxTrace}(A^{\otimes i})}{i} \quad (\dagger)$$

où pour une matrice $B \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$, on note :

$$\mathrm{MaxTrace}(B) = \max_{i=1,\ldots,n} B_{i,i}$$

Remarque – Dans la littérature (cf. [BCOQ] p. 47) la formule (†) s'écrit :

$$\lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(A^{\otimes i})^{1/i}$$

où il faut comprendre que les exposants comme la trace sont au sens “max-plus”, ce qui permet de montrer l’analogie entre ce résultat et l’algèbre linéaire classique.

Preuve – Par la prop. ci-dessus, le maximum des poids des circuits de longueur k allant du sommet i à lui-même est $(A^{\otimes k})_{i,i}$. Donc le maximum de poids de *tous* les circuits de longueurs k de $\Gamma(A)$ est bien $\max_{i=1,\dots,n} A^{\otimes k}_{i,i} = \mathrm{MaxTrace}(A^{\otimes k})$. Pour avoir (†) il suffit de remarquer qu’il n’est besoin de considérer que les circuits de longueurs 1 à n.

En effet, si on considère un circuit de longueur strictement plus grande que n, ce n’est plus un circuit élémentaire, donc il se décompose en circuit élémentaires et on peut appliquer le lemme. □

Théorème d’existence de valeurs propres

Définition 5.8. Une matrice A est dite *irréductible* s’il n’existe pas de permutation σ telle qu’en la faisant agir simultanément sur les lignes et les colonnes de A, on puisse transformer A en une matrice triangulaire par blocs et dont les blocs diagonaux sont carrés.

Cette définition se comprend mieux avec la :

Proposition 5.9. Une matrice A est *irréductible* si, et seulement si, le graphe de précédence associé est *fortement connexe.*

Le théorème qui nous intéresse pour répondre à la question soulevée en 4.2 est :

Théorème 5.10. Si $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$ est une matrice irréductible alors A a exactement une et une seule valeur propre au sens de 4.2. Cette valeur propre λ coïncide avec le poids moyen maximum de tous les circuits de $\Gamma(A)$, et donc par la prop. 5.7, elle s’obtient par la formule :

$$\lambda = \max_{i=1,\dots,n} \frac{\mathrm{MaxTrace}(A^{\otimes i})}{i} \qquad (\dagger)$$

On dispose en outre d’une méthode effective pour déterminer un vecteur propre associé à λ.

6 Application au problème des trains

6.1 Calcul de la valeur propre

On considère la matrice A correspondant au graphe de l’exemple 5.3. La matrice A est *irréductible* car le graphe de l’exemple 5.3 est *fortement connexe* (alors que celui de l’exemple 5.2 ne l’était pas).

Pour le cas des trains, les *poids* sur le graphe étant des *temps de parcours*, la valeur propre λ du théorème 5.10, calculée par la formule (†) de ce théorème, sera appelée plutôt le *temps moyen maximum parmi tous les circuits de* $\Gamma(A)$.

Ici on obtient par un calcul manuel (graphe petit) le résultat :

$$\lambda = 7$$

Un circuit réalisant ce temps moyen maximum est le circuit à un arc entre 4 et 4. Un circuit réalisant le temps moyen maximum est appelé *circuit critique*.

Néanmoins pour une matrice plus grosse, on peut utiliser SciLab qui gère les calculs en *max-plus*.

6.2 Calcul d'un vecteur propre

En SciLab, on obtient aussi un vecteur propre $X =^t (0, -2, 0, 0)$, (en acceptant un temps négatif au départ, ce qui revient à décaler l'origine des temps). (La formule donnant ce vecteur propre sera vue au § 7).

• Avec cette condition initiale $X(1) =^t (0, -2, 0, 0)$, *pour quatre trains sur le réseau*, on aura donc une table d'horaire parfaitement régulière, avec la relation $X(i+1) = A \otimes X(i)$:

$X(1)$	$X(2)$	$X(3)$	$X(4)$	$X(5)$
0	7	14	21	28
−2	5	12	19	26
0	7	14	21	28
0	7	14	21	28

• Si on part de la condition initiale $X(1) =^t (0, 5, 10, 0)$ avec quatre trains sur le réseau comme en 2.1, alors on obtient le tableau suivant :

$X(1)$	$X(2)$	$X(3)$	$X(4)$
0	16	23	30
5	5	21	28
10	9	23	30
0	16	23	30

Commentaires : Avec les conditions initiales données par le vecteur $X(1)$, comment comprendre $X(2)$: Le train au départ du **T1** arrive au départ du **T2** en 5 unité de temps. Il peut repartir tout de suite (pas de contrainte associée à cette gare) d'où $X(2)[2] = 5$.

Le train au départ de **T2** arrive au départ du **T3** en 4 unité de temps donc au temps $5 + 4 = 9$. Le train au départ de **T3** arrive au départ de **T1** au temps $10+6 = 16$. Le train au départ de **T4** arrive en fin de la boucle au temps $0+7 = 7$.

Avec les contraintes de coordinations :

Le train arrivé au départ de **T3** au temps 9 doit attendre les trains du tronçon **T4**, mais celui-ci est arrivé au temps 7, donc il repart tout de suite donc $X(2)[3] = 9$.

Le train du tronçon **T4** doit attendre les trains des tronçons **T1** et **T3**, celui de **T3** arrive à 9 et l'autre à 16, d'où le départ à 16.

6.3 Effet de l'ajout d'un train

Expliquer comment baisser la V.P.

7 Preuve du théorème des valeurs propres

Davantage de terminologie sur les graphes

Définition 7.1. Soit $\Gamma = (S, F)$ un graphe orienté où S est l'ensemble des sommets et F l'ensemble des flèches. Pour un sommet $i \in S$, on note $\pi(i)$ l'ensemble des *prédécesseurs immédiats de* i i.e. l'ensemble des $j \in S$ tel qu'il existe une flèche de j à i.

Ainsi $\pi : S \to \mathcal{P}(S)$ et on peut définir pour chaque $i \in S$,

$$\pi^2(i) = \bigcup_{j \in \pi(i)} \pi(j),$$

et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\pi^n(i)$.

On définit encore :

$$\pi^+(i) = \pi(i) \cup \pi^2(i) \cup \dots,$$

l'ascendance ou ensemble de tous les prédécesseurs de i

On pose aussi :

$$\pi^*(i) = \{i\} \cup \pi^+(i),$$

De même, on définit l'ensemble $\sigma(i)$ de tous les *successeurs immédiats* de i, et le ensembles $\sigma^+(i)$, $\sigma^*(i)$.

Définition 7.2. Un sommet i est une *source* (resp. *un puits*) si, et seulement si, $\pi(i) = \varnothing$ (resp. $\sigma(i) = \varnothing$).

Support d'un vecteur

La terminologie suivante sera particulièrement pratique :

Définition 7.3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$ et $\Gamma = \Gamma(A)$ le graphe de précédence associé. Soit $z \in M_{n,1}(\mathbb{R}_\varepsilon)$ un vecteur. L'ensemble des sommets $i \in [\![1, n]\!]$ de Γ tels que $z_i \neq \varepsilon$ sera appelé le *support* du vecteur z.

Cas de la valeur propre nulle : noyau

Proposition 7.4. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$. Le noyau* $\ker A = \{z \in M_{n,1}(\mathbb{R}_\varepsilon), ; A \otimes z = \varepsilon\}$ *est non trivial si, et seulement si, le graphe de précédence* $\Gamma(A)$ *contient au moins un noeud puits.*

Dans ce cas, pour chaque puits i de $\Gamma(A)$, *tout vecteur de support exactement* $\{i\}$ *est un vecteur du noyau.*

Preuve – On note encore ε pour le vecteur dont toutes les entrées valent ε dans $M_{n,1}(\mathbb{R}_\varepsilon)$.

Si $A \otimes z = \varepsilon$ alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\bigoplus_{j=1}^{n} a_{i,j} \otimes z_j = \varepsilon, \quad \text{i.e.}$$

$$\max_{j\in[\![1,n]\!]}(a_{i,j} + z_j) = -\infty$$

donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} + z_j = -\infty \quad (*)$.

Donc si $z \in \ker(A)$ et si $z_j \neq \varepsilon$ alors $a_{i,j} = \varepsilon$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de flèche de j à i dans $\Gamma(A)$ ce qui signifie bien que le sommet j est un *puits*.

La réciproque (obtenue en prenant des vecteurs comme dans l'énoncé) est analogue. □

Complémentaire du support d'un vecteur propre

Le lemme suivant dit que si un sommet du graphe $\Gamma(A)$ correspond à une entrée de valeur ε d'un vecteur propre de A alors tous ses prédécesseurs aussi.

Lemme 7.5. Si $z = {}^t(z_1,\ldots,z_n)$ est un vecteur propre de $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$, et si $z_i = \varepsilon$ alors pour tout $j \in \pi^+(i)$, $z_j = \varepsilon$.

Preuve – Dans l'égalité $A \otimes z = \lambda \otimes z$, la ligne i s'écrit :

$$\bigoplus_{j\in[\![1,n]\!]} a_{i,j} \otimes z_j = \lambda \otimes z_i$$

$$\Leftrightarrow \max_{j\in[\![1,n]\!]}(a_{i,j} + z_j) = \lambda + z_i \quad (*)$$

Si donc $z_i = \varepsilon$, $\lambda + z_i = \varepsilon$ et donc, avec $(*)$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} + z_j = \varepsilon$.

Donc pour tout les $j \in [\![1,n]\!]$ tels que $a_{i,j} \neq \varepsilon$ i.e. par déf. tous les $j \in \pi(i)$ (les prédécesseurs de i dans $\Gamma(A)$), on a : $z_j = \varepsilon$.

Le résultat pour $\pi^+(i)$ se démontre alors par récurrence immédiate. □

Corollaire 7.6. Si $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$ est une matrice *irréductible*, et si z est un vecteur propre de A, alors aucune coordonnées de z n'est égale à ε, autrement dit, le support de z est $\Gamma(A)$ tout entier.

Preuve – En effet si z avec une coordonnée $z_i = \varepsilon$, pour tout autre sommet j de $\Gamma(A)$ comme $j \in \pi^+(i)$, on aurait aussi $z_j = \varepsilon$ et donc $z = \varepsilon$, *contradiction.* □

Propagation des entrées non-ε d'un vecteur propre

Lemme 7.7. Si $z = {}^t(z_1,\ldots,z_n)$ est un vecteur propre de $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$, et si $z_i \neq \varepsilon$ alors il existe un $j \in \pi(i)$ tel que $z_j \neq \varepsilon$.

Preuve – Si z est comme dans l'énoncé, en reprenant l'égalité $(*)$ de la preuve de 7.5, la condition $z_i \neq \varepsilon$ équivaut à ce qu'il existe un $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i,j} + z_j \neq \varepsilon$. Cette dernière condition entraîne que $a_{i,j} \neq \varepsilon$ et $z_j \neq \varepsilon$ i.e. $j \in \pi(i)$ et $z_j \neq \varepsilon$. □

Application aux valeurs propres différentes de ε

Proposition 7.8. (i) Soit $z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$ un vecteur propre de $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$, associé à une valeur propre $\lambda \neq \varepsilon$.

Si $i \in [\![1, n]\!]$ est tel que $z_i \neq \varepsilon$ alors il existe un *circuit* dans $\pi^*(i)$ le long duquel les coordonnées de z sont toutes différentes de ε, i.e. inclus dans le support de z.

(ii) Toute valeur propre $\lambda \neq \varepsilon$ de A est égale au *poids moyen* (cf. déf. 5.4) d'un circuit de $\Gamma(A)$.

(iii) Si $\lambda \neq \varepsilon$ est une valeur propre de A et z est un vecteur propre associé, alors *pour tout* circuit C inclus dans le support de z, le poids moyen $m(C)$ vérifie :

$$m(C) \geq \lambda.$$

Preuve – (i) En appliquant le lemme 7.7 en partant du sommet numéro i, on construit par récurrence un chemin de $\Gamma(A)$ dont les sommets sont tous dans $\pi^*(i)$, avec la propriété de l'énoncé. Comme l'ensemble des sommets de $\Gamma(A)$ est *fini*, il existe un rang auquel on va rencontrer un sommet déjà obtenu, donc le chemin se ferme. (Noter que le circuit obtenu ne contient pas nécessairement le sommet i).

(ii) Dans la construction du chemin du (i), on peut toujours, pour chaque sommet k du chemin, choisir comme prédécesseur un sommet j tel que $a_{k,j} \otimes z_j = \lambda \otimes z_k$ (autrement dit choisir un indice j qui réalise le maximum de $\max_{l \in [\![1,n]\!]}(a_{k,l} + z_l)$).

Pour simplifier les notations supposons que le circuit C construit est : $1 \to 2, 2 \to 3, \ldots, p \to 1$.

Alors :

$$a_{2,1} \otimes z_1 = \lambda \otimes z_2,\ a_{3,2} \otimes z_2 = \lambda \otimes z_3, \ldots, a_{1,p} \otimes z_p = \lambda \otimes z_1.$$

Autrement dit :

$$a_{2,1} + z_1 = \lambda + z_2, a_{3,2} + z_2 = \lambda + z_3, \ldots, a_{1,p} + z_p = \lambda + z_1.$$

En ajoutant ces p équations membre à membre, et en simplifiant le terme $z_1 + \cdots + z_p$, on obtient :

$$a_{2,1} + a_{3,2} + \cdots + a_{1,p} = p\lambda,$$

ce qui est exactement la définition du fait que $\lambda = m(C)$ (cf. 5.4).

(iii) Soit C un circuit inclus dans le support de z. Comme $A \otimes z = \lambda \otimes z$, on a, pour tout couple (k, j) de sommet successifs dans le chemin C, en considérant la ligne j de cette égalité :

$$\max_{l \in [\![1,n]\!]} a_{j,l} + z_l = \lambda + z_j,$$

en particulier :

$$a_{j,k} + z_k \leq \lambda + z_j. \quad (*)$$

En ajoutant toutes les inégalités $(*)$ correspondant à toutes les flèches du chemin C, on obtient :

$$\sum_{(k,j)\in\mathcal{F}_C} a_{j,k} \leq p\lambda,$$

où $\mathcal{F}_C$ est l'ensemble des flèches de C et p le nombre de ces flèches. D'où la conclusion. □

Unicité de la valeur propre d'une matrice irréductible

Théorème 7.9. Si $A \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$ est une matrice *irréductible* alors A a au plus une valeur propre, qui est nécessairement le poids moyen maximum des chemins fermés de $\Gamma(A)$.

Preuve – Comme $\Gamma(A)$ est *fortement connexe*, il n'y a pas de puits, donc ε n'est pas valeur propre (cf. prop. 7.4)

De plus, si λ est une valeur propre de A et z est un vecteur propre associé, alors par 7.6, le support de z est $\Gamma(A)$ entier, et par 7.8 (iii) λ est donc supérieur ou égale au poids moyen de tous les chemins fermés de $\Gamma(A)$ et par le (ii) λ est égal au poids moyen d'un tel circuit, c'est donc bien le maximum de ces poids moyens. □

Transformation utile pour l'étude de l'existence d'un vecteur propre

Si on considère l'équation définissant valeur propre et vecteurs propres, à savoir :

$$A \otimes z = \lambda \otimes z \quad (*)$$

cette équation s'écrit pour chaque ligne i :

$$\max_{j\in[\![1,n]\!]} a_{i,j} + z_j = \lambda + z_i,$$

ce qui est équivalent à :

$$\max_{j\in[\![1,n]\!]} (a_{i,j} - \lambda + z_j) = z_i,$$

ou encore à :

$$B \otimes z = z \quad (**)$$

en posant $B = (-\lambda) \otimes A$, la matrice obtenue à partir de A en retranchant λ à chaque entrée.

On étudie donc le problème $(*)$ sous la forme $(**)$.

Comme le graphe $\Gamma(B)$ a les mêmes sommets et les mêmes flèches que $\Gamma(A)$, avec comme seule modification que chacun des poids des flèches est diminué de λ, la proposition 7.8 (ii) et (iii) donne immédiatement la remarque suivante :

Remarque 7.10 (Sur le graphe $\Gamma(B)$ où $B = (-\lambda) \otimes A$)**.**

(i) Contrairement aux graphes considérés jusqu'à présent, le graphe $\Gamma(B)$ a des poids négatifs et mieux :

(ii) Tout circuit de $\Gamma(B)$ a un poids moyen inférieur ou égal à $e = 0$, et

(iii) il existe (au moins) un circuit de $\Gamma(B)$ de poids moyen exactement égal à $e = 0$.

Un intérêt de B vient de la construction suivante :

Proposition 7.11. Soit $B \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$ comme ci-dessus alors la matrice B^+ suivante est bien définie :

$$B^+ = \bigoplus_{k=1}^{+\infty} B^{\otimes k} \quad (\dagger)$$

en ce sens que $\forall\ N \geq n$, $\bigoplus_{k=1}^{N} B^{\otimes k} = \bigoplus_{k=1}^{n} B^{\otimes k}$.

Démonstration :

Cette propriété est claire si on se souvient (cf 5.5) que $(B^{\otimes_k})_{i,j}$ est le maximum des poids des chemins sur $\Gamma(B)$ de longueur k. Ici tous les circuits sont à poids négatifs, et pour $k > n$, tout chemin de longueur k contient un circuit et est donc de poids inférieur au chemin obtenu en enlevant ce circuit. Donc pour chaque i, j, si $N \geq n$, $\max_{k \in [\![1,N]\!]} B^{\otimes k}(i,j) = \max_{k \in [\![1,n]\!]} B^{\otimes k}(i,j)$. □

Théorème 7.12. Soit $B \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$ comme ci-dessus, si on suppose en outre que B est irréductible (ce qui est équivalent à A irrréductible) si un sommet i du graphe $\Gamma(B)$ appartient à un circuit de poids maximal e de B alors la i-ème colonne de la matrice B^+ définie ci-dessus est un vecteur propre de B.

A cause de l'équivalence des équations $(*)$ et $(**)$ ci-dessus, on en déduit l'existence d'un vecteur propre pour *toute matrice irréductible* A ainsi qu'une façon pratique de calculer un vecteur propre.

Preuve – On note $e \in M_n(\mathbb{R}_\varepsilon)$ l'élément neutre pour $\otimes$ i.e. la matrice dont les entrées diagonales valent e et les entrées non diagonales valent ε.

On note $B^* = e \oplus B^+$. Les colonnes de B^+ et B^* ne peuvent différer que par leur entrée diagonale.

Mais si i vérifie la propriété de l'énoncé, on a $(B^+)_{i,i} = e$ (le circuit de poids maximal i à i est de poids nul, puisque « poids nul » ou » poids moyen nul » sont deux propriétés équivalentes) et donc $B^*_{i,i} = \max(e,e) = e$.

Donc en notant $C_i(M)$ la i-ième colonne d'une matrice M, on a l'égalité des deux colonnes :

$$C_i(B^+) = C_i(B^*) \quad (1)$$

Or par déf. de $B^+ = B \oplus B^2 \oplus \cdots$ et $B^* = I \oplus B \oplus B^2 \oplus \cdots$, on a l'égalité :

$$B \otimes B^* = B^+,$$

ce qui se traduit, par définition du produit de matrices, à la colonne i, par :

$$B \otimes C_i(B^*) = C_i(B^+) \quad (2)$$

En comparant (1) et (2), on a la conclusion : $B \otimes C_i(B^+) = C_i(B^+)$. $\square$

Références

[Co] G. Cohen, Théorie algébriques des systèmes à événements discrets, cours, Ecole des mines de Paris et INRIA, 1995.
`http://www-rocq.inria.fr/metalau/cohen/enseign-f.html`

[Ol] G.J. Olsder, Max algebra approach to discrete event systems, Notas de Matemática, No. 191, Mérida, Venezuela, 1999.

[BCOQ] F. Bacelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J.-P. Quadrat, Synchronization and Linearity, Wiley, 1992, épuisé mais téléchargeable gratuitement sur :
`http://www-rocq.inria.fr/metalau/cohen/SED/book-online.html`