

1) La distribution étant invariante par rotation autour de Oz , le potentiel V ne dépend que de z et de $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \alpha = \beta$. De plus, en l'absence de charge, $\Delta V = 0 \rightarrow 2 + 2(\alpha + \beta) = 0 \rightarrow \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$

2) L'énergie potentielle de la charge s'écrit $\mathcal{E}_p = -\frac{e\eta V}{2l_0^2} (2z^2 - x^2 - y^2)$.

Au centre du piège, \mathcal{E}_p est soit maximale selon z si V est positif, soit maximale selon x et y si V est négatif. Dans le deux cas, il y a instabilité. En d'autres termes, \mathcal{E}_p n'admet pas de minimum absolu en O (point col).

On peut aussi analyser la force $\vec{F} = \frac{e\eta V}{l_0^2} (2z\vec{e}_z - x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$ subie par la charge. Celle-ci ne se comporte pas comme une force de rappel selon z si V est positif, ni selon x et y si V est négatif.

3) On applique la 2^{ème} loi de Newton dans le référentiel du laboratoire galiléen :

$$\ddot{x} = -\frac{e\eta V(t)}{ml_0^2} x \quad \ddot{y} = -\frac{e\eta V(t)}{ml_0^2} y \quad \ddot{z} = \frac{2e\eta V(t)}{ml_0^2} z \rightarrow n_x = n_y = 2 \text{ et } n_z = -4$$

4) Dans cette question et la suivante, nous considèrerons que $R_i(t)$ varie peu durant la période $2\pi/\Omega$ du signal rapide $\xi_i(t)$. Ainsi, les moyennes $\langle R_i \rangle$ et $\langle \ddot{R}_i \rangle$ seront assimilées à $R_i(t)$ et $\ddot{R}_i(t)$.

Par exemple, $\langle R_i(t) \cos(\Omega t) \rangle \sim R_i(t) \langle \cos(\Omega t) \rangle = 0$. Comme d'autre part $\langle \ddot{r}_i \rangle = \langle \ddot{R}_i \rangle$, finalement, en moyennant la relation (2), on obtient (3) que l'on peut même prolonger en $\ddot{R}_i + q_i \frac{\Omega^2}{2} \langle \xi_i(t) \cos(\Omega t) \rangle = 0$.

5) $\xi_i(t) = \xi_{i0} \cos(\Omega t + \varphi_i)$ Ainsi, d'après ce qui précède, $\ddot{R}_i + q_i \frac{\Omega^2}{4} \xi_{i0} \cos(\varphi_i) = 0$ (*)

En assimilant le terme " $\cos(\Omega t) \cos(\Omega t + \varphi_i)$ " à " $\frac{1}{2} \cos(\varphi_i)$ ", (2) s'écrit à présent

$$\ddot{R}_i + \ddot{\xi}_i + q_i \frac{\Omega^2}{2} R_i(t) \cos(\Omega t) + q_i \frac{\Omega^2}{4} \xi_{i0} \cos(\varphi_i) = 0 \rightarrow \ddot{\xi}_i = -q_i \frac{\Omega^2}{2} R_i(t) \cos(\Omega t) \text{ par (*)}$$

Enfin, $\xi_i(t) = \frac{q_i}{2} R_i(t) \cos(\Omega t)$ si on considère encore une fois, $R_i(t)$ à peu près constant sur quelques périodes $2\pi\Omega^{-1}$ du signal rapide. Dans le régime $\Omega \gg \omega$ étudié ici, $|q_i| \ll 1$ et donc $|\xi_i| \ll R_i$.

6) Comme $\langle \xi_i(t) \cos(\Omega t) \rangle = \frac{q_i}{4} R_i(t)$, nous pouvons écrire (3) ainsi : $m\ddot{R}_i + m \left(\frac{q_i\Omega}{2\sqrt{2}} \right)^2 R_i(t) = 0$

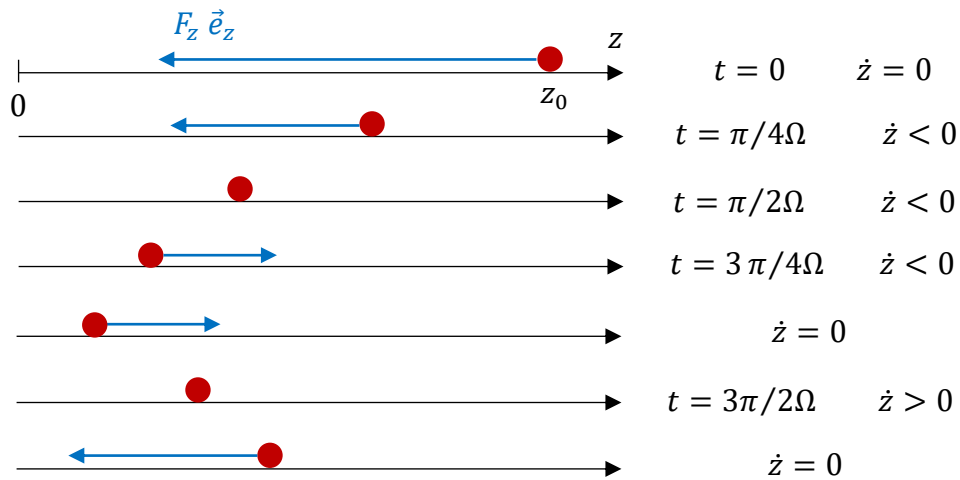
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{R}_i^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{q_i\Omega}{2\sqrt{2}} \right)^2 R_i^2 \right) = 0 \quad (\dot{R}_i \neq 0)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique d'énergie potentielle $\frac{m}{2} \left(\frac{q_i\Omega}{2\sqrt{2}} \right)^2 R_i^2 \rightarrow \omega_i = \frac{|q_i|\Omega}{2\sqrt{2}} \ll \Omega$

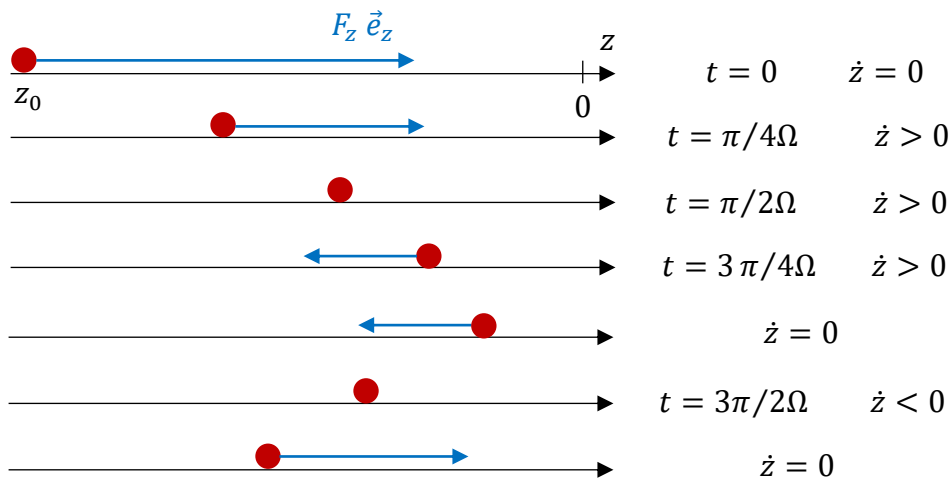
C'est cohérent, $R_i(t)$ varie beaucoup plus lentement que $\xi_i(t)$.

7) $F_z = \frac{2e\eta V_0}{ml_0^2} z \cos(\Omega t)$ Dans le cas $z_0 > 0$, la particule est *fortement* accélérée vers la gauche ($z \searrow$)

puis *faiblement* accélérée vers la droite car globalement, z est plus grand quand $\cos(\Omega t) > 0$.

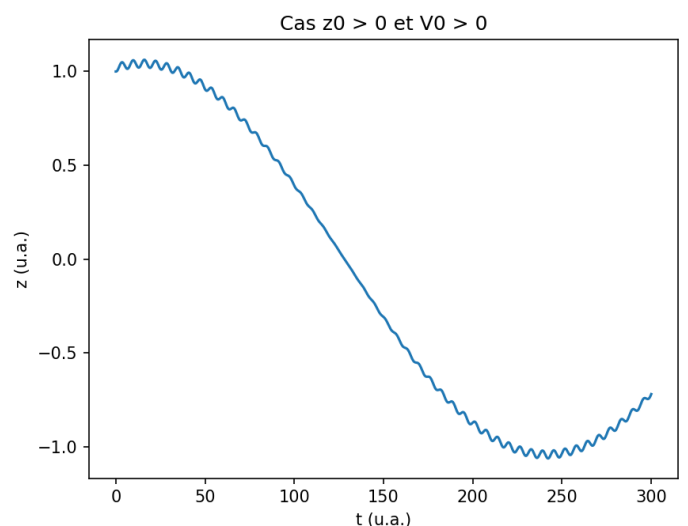
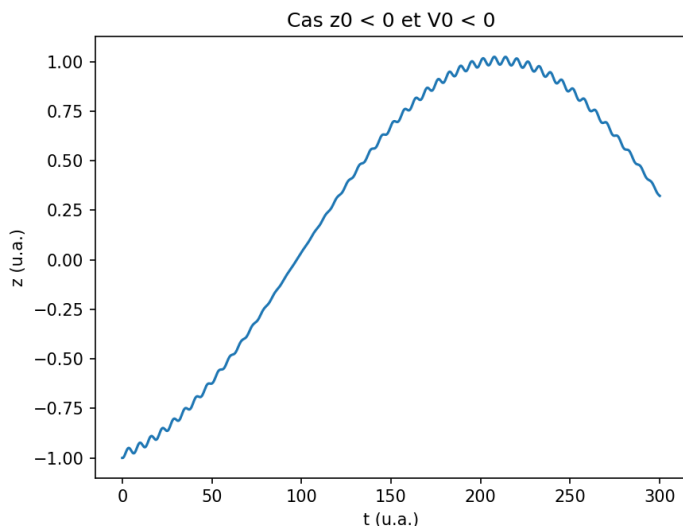


Dans le cas $z_0 < 0$, la particule est *fortement* accélérée vers la droite ($z \nearrow$) puis *faiblement* accélérée vers la gauche car globalement, $|z|$ est plus grand quand $\cos(\Omega t) > 0$.



Dans les deux cas, la particule subit en moyenne une force de rappel tendant à la rapprocher de $z = 0$.

Voici deux illustrations issues d'une résolution numérique sous python. (Programme disponible en ligne)



8) Il est question ici de la capacité du système à **résister aux perturbations** environnementales ou intrinsèques grâce à une *constante de raideur* suffisamment forte, c'est-à-dire un potentiel harmonique $U_{eff}(R_i)$ suffisamment sensible aux évolutions de R_i . Ainsi, il faut que $\omega_i = \frac{|q_i|\Omega}{2\sqrt{2}}$ ne soit pas trop petit.

9) $|q_z| = \frac{4e\eta|V_0|}{ml_0^2\Omega^2} \rightarrow 1 V < |V_0| < 4 V$ C'est une gamme qui ne présente aucune difficulté.

10) Les plans (Oxy) et (Oxz) sont des plans de symétrie du fil donc $V_a(x, y, z) = V_a(x, y, -z)$ et $V_a(x, y, z) = V_a(x, -y, z)$.

11) L'équation de Poisson est toujours vérifiée. En l'absence de charge, $\Delta(V_{el} + V_a) = 0$.

Ainsi, $\frac{1}{l_0^2}(a_x + a_y + a_z) + \frac{1}{l_1^2}(b_x + b_y + b_z)x = 0 \quad \forall x \Leftrightarrow a_x + a_y + a_z = 0$ et $b_x + b_y + b_z = 0$

12-13) Si on applique le théorème d'équipartition énergétique issu de la statistique de Boltzmann,

au terme quadratique $U_{eff}(R_x)$, on a $\langle \frac{m}{2} \omega_x^2 R_x^2(t) \rangle = \frac{k_B T}{2} \rightarrow \sqrt{\langle R_x^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_x^2}} = \frac{2}{q_x \Omega} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = 0,1 \text{ mm}$

Dans ces conditions, le piège est un peu **trop petit** pour cette particule.

14) A l'équilibre, l'énergie potentielle totale $U_{eff} + mgz$ est minimale : $z_0 = -\frac{g}{\omega_z^2} = -0,2 \mu\text{m}$

Ce résultat est rassurant, la lévitation s'effectue bien au voisinage du centre du piège.

15) $n = \frac{P}{k_B T} \rightarrow K_n = \frac{k_B T}{\sqrt{2\pi a^2 P d}} = 9.10^3$ Le régime d'écoulement est **libre**.

16) Toujours d'après le théorème d'équipartition énergétique, $v_{qm} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{N_2}}} = 5.10^2 \text{ m.s}^{-1}$

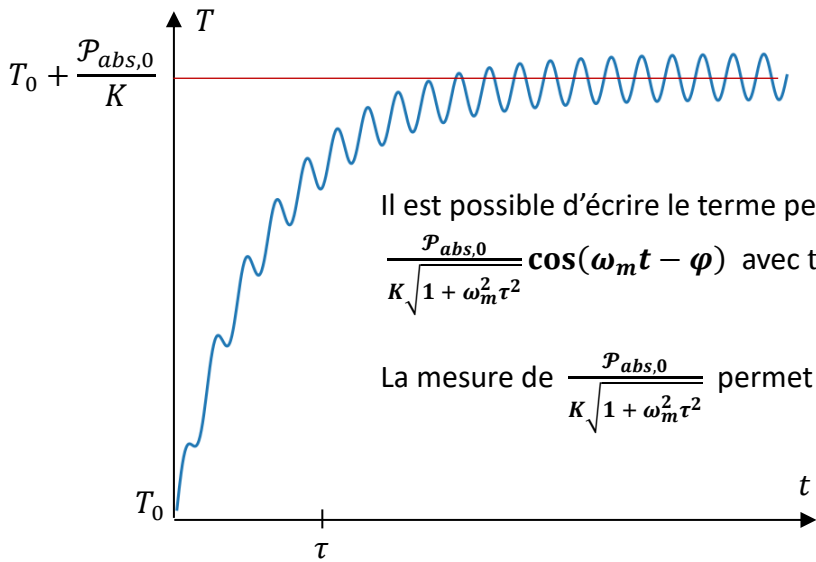
La durée moyenne entre deux chocs est environ $l^*/v_{qm} = 2 \mu\text{s}$.

17) D'après la loi de Newton concernant les échanges conducto-convectifs, $\Phi = hS(T - T_0)$

18) On applique le premier principe à la particule : $mc_m \frac{dT}{dt} = \mathcal{P}_{abs,0}(1 + \cos(\omega_m t)) - K(T(t) - T_0)$

19-22) $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}(T(t) - T_0 - \frac{\mathcal{P}_{abs,0}}{K}) = \frac{\mathcal{P}_{abs,0}}{K\tau} \cos(\omega_m t)$ avec $\tau = \frac{mc_m}{K} = \frac{mc_m}{\pi h d^2} = 0,3 \text{ ms}$ C'est très court.

$$T(t) = \underbrace{T_0 + \frac{\mathcal{P}_{abs,0}}{K}}_{\text{Stationnaire}} - \underbrace{\left(\frac{\mathcal{P}_{abs,0}}{K} + \frac{\mathcal{P}_{abs,0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} \right)}_{\text{Transitoire}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \underbrace{\frac{\mathcal{P}_{abs,0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} (\cos(\omega_m t) + \omega_m \tau \sin(\omega_m t))}_{\text{Permanent sinusoïdal}}$$



[Il me semble que la valeur donnée de la puissance est trop élevée : $\frac{P_{abs,0}}{K} = 3.10^7 K \dots$]

23-24) $\gamma = 10^4 s^{-1}$ D'après le T.M.C. projeté sur Oz , $I\ddot{\phi} = -I\gamma\dot{\phi} - I\omega_\phi^2\phi \rightarrow \ddot{\phi} + \gamma\dot{\phi} + \omega_\phi^2\phi = 0$

Par définition, $\gamma = \omega_\phi/Q \rightarrow Q = 2\pi$ L'oscillateur est peu amorti.

25) $\omega_{max} = \frac{c_l}{l_\gamma} = \frac{10c_l}{md^2\gamma} = 5.10^9 rad.s^{-1}$

26) On applique le T.R.C. à la particule : $m\vec{a}(C) = -e(\vec{E}(P_1) + \vec{E}(P_2))$

Or $\vec{E}(P_1) = \frac{\eta V(t)}{l_0^2}((x + \delta x)\vec{u}_x + (y + \delta y)\vec{u}_y - 2(z + \delta z)\vec{u}_z)$ et

$\vec{E}(P_2) = \frac{\eta V(t)}{l_0^2}((x - \delta x)\vec{u}_x + (y - \delta y)\vec{u}_y - 2(z - \delta z)\vec{u}_z)$ Ainsi, $m\vec{a}(C) = -2e\vec{E}(C)$

27-28) $\vec{\Gamma}_{O,1} = -e\vec{OP}_1 \wedge \vec{E}(P_1) = \frac{3e\eta V(t)}{l_0^2}((y + \delta y)(z + \delta z)\vec{u}_x - (x + \delta x)(z + \delta z)\vec{u}_y)$

$\vec{\Gamma}_{O,2} = -e\vec{OP}_2 \wedge \vec{E}(P_2) = \frac{3e\eta V(t)}{l_0^2}((y - \delta y)(z - \delta z)\vec{u}_x - (x - \delta x)(z - \delta z)\vec{u}_y)$

$\vec{\Gamma}_O = \frac{6e\eta V(t)}{l_0^2}(yz\vec{u}_x - xz\vec{u}_y) + \underbrace{\frac{6e\eta V(t)}{l_0^2}(\delta y\delta z\vec{u}_x - \delta x\delta z\vec{u}_y)}_{\vec{\Gamma}_C}$

Le premier terme est responsable du mouvement de C autour de O .

29-30) $\vec{v} = \frac{d}{dt}(\delta x\vec{u}_x + \delta y\vec{u}_y + \delta z\vec{u}_z) = \dot{\phi}_1\vec{u}_x - \dot{\phi}_2\vec{u}_y + \dot{u}_z$ donc $\delta x = \frac{d}{2}\phi_1$ $\delta y = -\frac{d}{2}\phi_2$ $\delta z = \frac{d}{2}$

Ainsi, $I\ddot{\phi}_1 = -\frac{6e\eta V(t)}{l_0^2}\delta x\delta z = -\frac{3e\eta V(t)d^2}{2l_0^2}\phi_1$ et $I\ddot{\phi}_2 = \frac{6e\eta V(t)}{l_0^2}\delta y\delta z = -\frac{3e\eta V(t)d^2}{2l_0^2}\phi_2$

Conformément à la symétrie du système, ϕ_1 et ϕ_2 vérifient la même équation : $\ddot{\phi}_i + \frac{3e\eta V(t)d^2}{2l_0^2 I}\phi_i = 0$

Par exemple, on peut poser $\omega_r^2 = \frac{e\eta V_0 d^2}{l_0^2 I}$ et $q_{\phi_i} = 3(\omega_r/\Omega)^2$.

31) On poursuit l'analogie en décomposant la variable ϕ_i en une somme d'un signal périodique rapide de pulsation Ω et d'un signal lent variant sur une échelle de temps beaucoup plus grande que Ω^{-1} .

Depuis l'étude de la première partie, notamment des questions 6 et 7, on peut affirmer que sur le long terme, ϕ_1 et ϕ_2 oscillent autour de la valeur nulle et donc que la particule subit un couple de rappel.

D'après Q6, la pulsation effective associée à son confinement angulaire est $\omega_{\phi_i} = \frac{q\phi_i\Omega}{2\sqrt{2}} = \frac{3e\eta V_0 d^2}{2\sqrt{2}l_0^2 I \Omega}$.

Pour deux charges, la pulsation effective associée au mouvement de C est $\omega_z = \frac{|q_z|\Omega}{2\sqrt{2}} = \frac{8e\eta V_0}{2\sqrt{2}ml_0^2 \Omega}$.

$$\frac{\omega_z}{\omega_{\phi_i}} = \frac{8I}{3md^2} = \frac{4}{15}$$

32) $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2\vec{r} = m\Omega^2(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$ $\vec{F}_{ic} = 2m\vec{v} \wedge \vec{\Omega} = 2m\Omega(y\vec{u}_x - x\vec{u}_y)$

33-34) On applique la 2^{ème} loi de Newton à la balle dans \mathcal{R} non galiléen : $m\vec{a} = -\overrightarrow{grad} U + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$
 $\rightarrow \ddot{x} = (\Omega^2 - \omega^2)x + 2\Omega\dot{y}$ et $\ddot{y} = (\Omega^2 + \omega^2)y - 2\Omega\dot{x}$ (S)

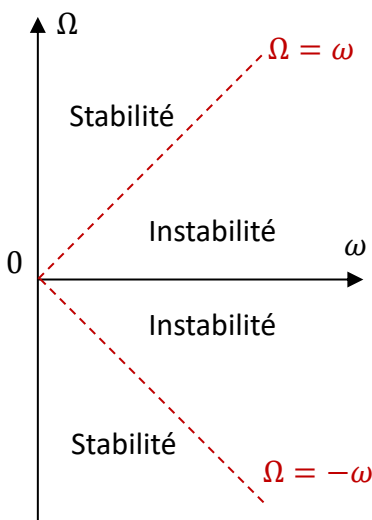
Les amplitudes x_0 et y_0 sont solutions du système linéaire homogène $\begin{cases} (r^2 + \omega^2 - \Omega^2)x_0 - 2\Omega r y_0 = 0 \\ 2\Omega r x_0 + (r^2 - \omega^2 - \Omega^2)y_0 = 0 \end{cases}$

Ce système n'a de solution $(x_0 ; y_0)$ non nulle que si le **déterminant de la matrice associée est nul** :

$$(r^2 + \omega^2 - \Omega^2)(r^2 - \omega^2 - \Omega^2) + 4\Omega^2 r^2 = 0 \Leftrightarrow r^4 + 2\Omega^2 r^2 + \Omega^4 - \omega^4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -\Omega^2 \pm \omega^2$$

En définitive, $r = \pm i\sqrt{\Omega^2 + \omega^2}$ et $r = \pm i\sqrt{\Omega^2 - \omega^2}$ si $|\Omega| \geq \omega$. La **stabilité est alors acquise** car $r \in i\mathbb{R}$.

Au contraire, si $|\Omega| < \omega$, $r = \pm i\sqrt{\Omega^2 + \omega^2}$ et $r = \pm\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}$. La stabilité n'est alors plus assurée.



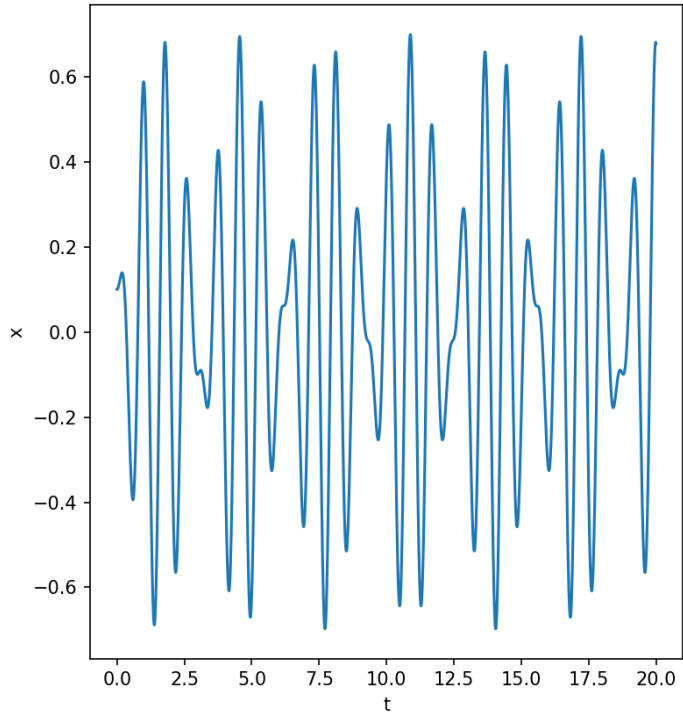
Si $|\Omega|$ est suffisamment grand, le régime stable est une superposition de deux sinusoïdes de pulsations différentes ($\sqrt{\Omega^2 - \omega^2}$ et $\sqrt{\Omega^2 + \omega^2}$). On assiste à des battements.

Si $|\Omega|$ est trop faible, la solution réelle $r = \sqrt{\omega^2 - \Omega^2}$ est responsable de l'éjection de la balle à cause de "exp ($\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}t$)" qui tend vers l'infini.

Ces résultats sont confirmés par une résolution numérique du système (S). Les codes sont disponibles sur la Dropbox. La méthode d'Euler explicite ne donne pas satisfaction mais celle de Runge-Kutta est performante tout autant que le module `scipy.integrate.odeint` !

Les figures ci-après ont été obtenues avec $\Omega = 2\omega = 8 u. arb$.

Abscisse x en fonction du temps



Trajectoire

