

1) Les ressorts modélisent **les interactions entre les atomes**. La déformation de la maille a pour conséquence l'apparition de forces de rappel du type « ressort » avec $x_B \ll 2a$.

2) En B nous avons $f - K_2(x_B - x_P) - K_1(x_B - x_N) = 0 \Leftrightarrow f = (K_1 + K_2)x_B - K_2x_P - K_1x_N$

En P et N nous pouvons écrire $K_2(x_B - x_P) - K_1x_P + qE = 0$ et $K_1(x_B - x_N) - K_2x_N - qE = 0$ (*)

$$\text{Ainsi, } f = \left(K_1 + K_2 - \frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1 + K_2} \right) x_B + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} qE = \frac{2K_1K_2}{K_1 + K_2} x_B + \frac{q(K_1 - K_2)}{K_1 + K_2} E$$

On remarque qu'en l'absence de champ E , l'ensemble est équivalent à l'association en parallèle de deux

couples identiques de ressorts montés en série : $K_{eq} = (K_1 \oplus K_2) \parallel (K_1 \oplus K_2) = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2} + \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}$

3) D'après les relations (*), $p = q(x_P - x_N) = q \left(\frac{2qE + (K_2 - K_1)x_B}{K_1 + K_2} \right)$

4) Intéressons-nous à une ligne de N_1 cellules : En l'absence de champ E , on a d'une part l'association en

série de N_1 cellules de raideur $K_{eq} = \frac{2K_1K_2}{K_1 + K_2}$ et d'autre part en l'absence d'élongation, la répercussion de

proche en proche de la force électrique $\frac{q|K_1 - K_2|}{K_1 + K_2} E$. Au final, $F_{ligne} = \frac{2K_1K_2}{N_1(K_1 + K_2)} \Delta + \frac{q(K_1 - K_2)}{K_1 + K_2} E$.

Comme l'élément est constitué de N_2N_3 lignes associées en parallèle, $F = \frac{2N_2N_3K_1K_2}{N_1(K_1 + K_2)} \Delta + \frac{qN_2N_3(K_1 - K_2)}{K_1 + K_2} E$

5) $L = 2aN_1$ et $S = 4a^2N_2N_3 \rightarrow \sigma = \frac{K_1K_2}{a(K_1 + K_2)} \Delta_r + \frac{q(K_1 - K_2)}{4a^2(K_1 + K_2)} E$

6) En s'inspirant des atténuations dans le temps ou dans l'espace sous la forme d'exponentielle

$\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ ou } \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \right)$, on peut proposer $L_u^* = \left| \frac{u}{\frac{\partial u}{\partial x}} \right|$ avec $2a \ll dx \ll L_u^*$.

7) En assimilant P à $\frac{p}{8a^3}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ à $\frac{x_B}{2a}$ ou Δ_r , on obtient

$$\alpha = \frac{q^2}{4a^2(K_1 + K_2)} \quad \beta = \frac{q(K_2 - K_1)}{4a^2(K_1 + K_2)} \quad A = \frac{K_1K_2}{a(K_1 + K_2)} \quad B = -\frac{q(K_1 - K_2)}{4a^2(K_1 + K_2)} = \beta$$

8) $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_P}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{div } \vec{P} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \epsilon_0 E = -P + \epsilon_0 f_Q(t) \rightarrow \epsilon E + \beta \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_0 f_Q(t)$

D'après la première des deux relations (2).

9) On applique le théorème de Gauss sur un cylindre de longueur élémentaire positionné en $x = L$:

$$\frac{Q(t) + S\sigma_P}{\epsilon_0} = S(E(L^+) - E(L^-)) \rightarrow \frac{Q(t)}{S} + P(L^-) = -\epsilon_0 E(L^-)$$

Or $\epsilon_0 E(L^-) = -P(L^-) + \epsilon_0 f_Q(t)$ donc $\frac{Q(t)}{S} = -\epsilon_0 f_Q(t)$ et ainsi, $\epsilon E + \beta \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{Q}{S}$

10) Vu que $E = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $V(x, t) = \frac{Q(t)}{S\epsilon} x + \frac{\beta}{\epsilon} u(x, t)$ car $\forall t, V(0, t) = 0$ et $u(0, t) = 0$

$$\psi(t) = V(L, t) = \frac{Q(t)}{C_e} + \frac{\beta}{\epsilon} u(L, t)$$

11) D'après la deuxième des deux relations (2), $\sigma(x, t) = A \frac{\partial u}{\partial x} - \beta \left(-\frac{\beta}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{Q}{S\epsilon} \right) = \left(A + \frac{\beta^2}{\epsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta}{S\epsilon} Q(t)$

12) $\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S\sigma(x + dx, t) - S\sigma(x, t) = S dx \frac{\partial \sigma}{\partial x} = S dx A' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Avec $c = \sqrt{\frac{A'}{\rho}} = \sqrt{\frac{A + \frac{\beta^2}{\epsilon}}{\rho}}$

13) La relation de dispersion est $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ ($k = k_+ = \frac{\omega}{c}$, $k_- = -\frac{\omega}{c}$)

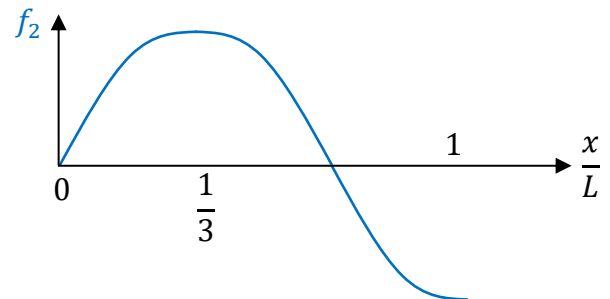
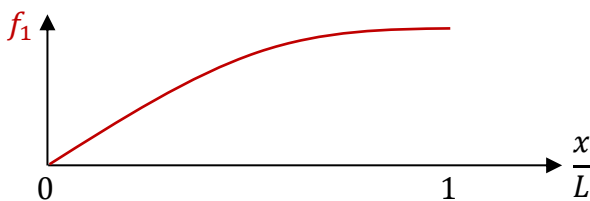
14) On a alors $u(x, t) = A_+ \exp(j\omega t) \exp(-jkx) + A_- \exp(j\omega t) \exp(jkx)$

Or $u(0, t) = 0 \forall t$ donc $A_+ = -A_-$ et ainsi $u(x, t) = 2jA_- \exp(j\omega t) \sin(kx)$

15) L'équation (5) est **réversible** dans le temps. Toute partie imaginaire de ω contredirait cette propriété.

16-17) Par rapport aux conditions à l'origine de la forme (7) des solutions, est ajouté $\sigma(L, t) = 0 \forall t$,

c'est-à-dire $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \forall t$. Ainsi, $k_q = \frac{(2q-1)\pi}{2L}$ et $\omega_q = \frac{(2q-1)\pi c}{2L}$.



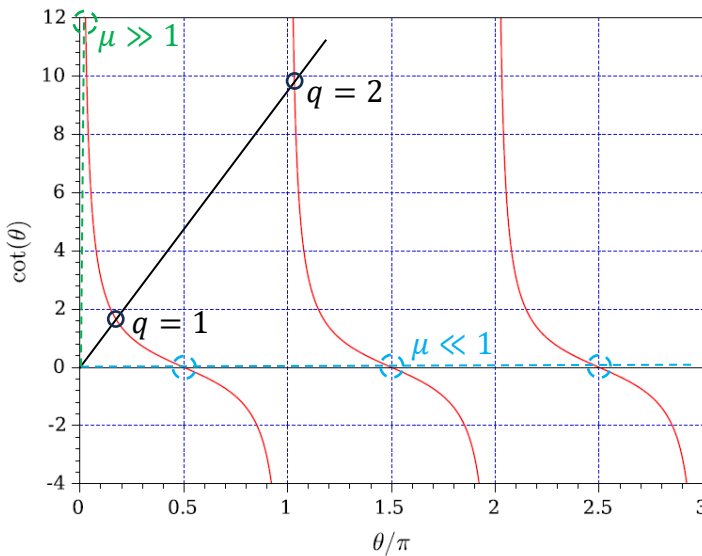
18-20) Voir Q15. On applique la 2^{ème} loi de Newton à l'objet en question. Il subit la contrainte $-\sigma(L, t)$

exercée par la partie gauche sur la partie droite : $M_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) = -S\sigma(L, t)$

$$\rightarrow M_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) = -SA' \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \quad \text{Ainsi, } M_0 \omega^2 \sin(kL) = SA' k \cos(kL) \rightarrow \mu = \frac{M_0}{S\rho L} = \frac{M_0}{m}$$

La constante μ est le rapport de la masse fixée en $x = L$ sur la masse de l'élément piézo-électrique.

21-22) On ajoute au graphe de la figure 4 la droite d'équation $y = 3\pi x$ et on recherche les intersections.



Pour $q \geq 2$, $\theta_q \sim (q-1)\pi \rightarrow k_q \sim \frac{(q-1)\pi}{L}$
 et enfin $f_q \sim \frac{(q-1)c}{2L}$. $f_2 = \frac{c}{2L} = 1,8 \text{ MHz}$

On constate globalement un affaiblissement des fréquences propres et une transformation de l'extrémité ($x = L$) de ventre à nœud de vibration.

Si $\mu \ll 1$, les intersections sont en $\theta_q = \frac{(2q-1)\pi}{2L}$
 c'est-à-dire qu'on retrouve les modes k_q et f_q obtenus sans charge mécanique.

Au contraire, si $\mu \gg 1$, l'inertie est si grande que

seul le mode fondamental $q = 1$ de fréquence quasi-nulle est solution.

23) $\mathcal{E}_c^* = \frac{m^*}{2} \omega_1^2 u_1^2 \sin^2(\omega_1 t)$ Chaque élément dx positionné en x a pour énergie cinétique $\frac{m dx}{2L} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$

$$\rightarrow \mathcal{E}_c = \int_0^L \frac{m}{2L} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{m}{2L} \omega_1^2 u_1^2 \sin^2(\omega_1 t) \int_0^L \sin^2(k_1 x) dx = \frac{m}{4} \omega_1^2 u_1^2 \sin^2(\omega_1 t) \quad \text{Ainsi, } m^* = \frac{m}{2}.$$

On reconnaît ici la même démarche que celle rencontrée lors du calcul d'un moment d'inertie d'un solide :

on attribue à tous les points du système la vitesse maximale de l'extrémité $\left(\frac{\partial u}{\partial t}(L, t)\right)$ mais en

contrepartie, on doit sous-estimer sa masse $\left(\frac{m}{2}\right)$.

24) $\mathcal{E}_p^* = \frac{K^*}{2} u^2(L, t) = \frac{K^*}{2} u_1^2 \cos^2(\omega_1 t)$ Nous savons qu'un ressort de raideur K , d'allongement Δl , a pour énergie potentielle $\frac{K}{2} (\Delta l)^2 = \frac{K \Delta l}{2} \Delta l$ avec $K \Delta l$, sa force de tension.

Voyons l'élément dx placé en x comme un ressort : son allongement est $u(x+dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dx$,

sa force de tension est $SA' \frac{\partial u}{\partial x}$ donc son énergie potentielle s'écrit $\frac{SA'}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$.

$$\rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{SA'}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{SA'}{2} k_1^2 u_1^2 \cos^2(\omega_1 t) \int_0^L \cos^2(k_1 x) dx = \frac{\pi^2 SA'}{16L} u_1^2 \cos^2(\omega_1 t) \quad \text{Ainsi, } K^* = \frac{\pi^2 SA'}{8L}$$

Dans le cas statique, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = cste = \frac{u(L) - u(0)}{L} = \frac{\Delta}{L}$ $\mathcal{E}_p = \frac{SA'}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{SA' \Delta^2}{2L} \rightarrow K^0 = \frac{SA'}{L}$

La raideur K^* est légèrement supérieure à K^0 .

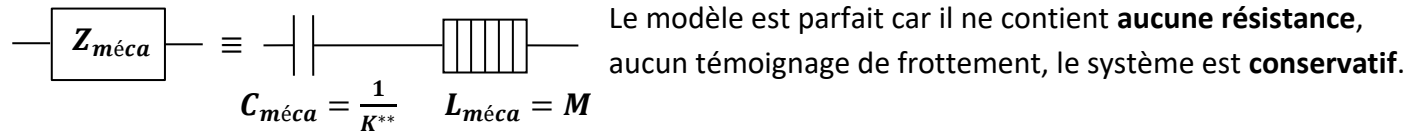
25) $\omega_1^* = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{\pi^2 SA'}{4mL}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{SA'}{\rho SL^2}} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{A'}{\rho}} = \frac{\pi c}{2L} = \omega_1$

26) La force F_L étant issue de $S\sigma$ (la force qu'exerce la partie droite sur la partie gauche), représente

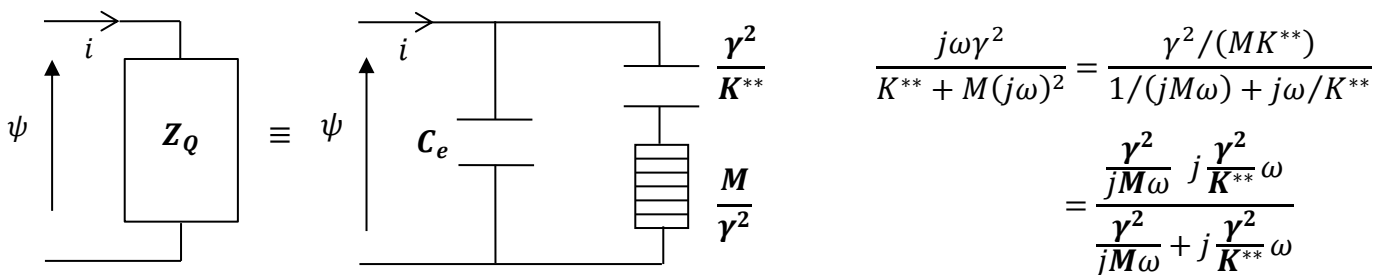
l'opposée de la force exercée sur m^* : $M\ddot{\Delta} = F_0 - F_L = F_0 - K^*\Delta - \frac{B}{\varepsilon}Q = F_0 - K^{**}\Delta - \gamma\psi$

$\rightarrow j\omega M(j\omega\tilde{\Delta}) = \tilde{F}_0 - \frac{K^{**}}{j\omega}(j\omega\tilde{\Delta}) - \gamma\tilde{\psi}$ En définitive, $\tilde{F}_0 = Z_{méca} j\omega\tilde{\Delta} + \gamma\tilde{\psi}$

27-28) $i = \dot{Q} \rightarrow \tilde{i} = jC_e\omega\tilde{\psi} - \gamma j\omega\tilde{\Delta} \rightarrow J = \gamma j\omega\tilde{\Delta}$ et $F_e = \gamma\tilde{\psi}$ Enfin, $\frac{F_e}{\tilde{\psi}} = \gamma$.



29) Si $F_0 = 0$, on a alors $\gamma\tilde{\psi} = -Z_{méca} j\omega\tilde{\Delta}$ et ainsi $\tilde{i} = \left(jC_e\omega + \frac{\gamma^2}{Z_{méca}}\right)\tilde{\psi} = \left(jC_e\omega + \frac{j\omega\gamma^2}{K^{**} + M(j\omega)^2}\right)\tilde{\psi}$



30) En $\omega = \omega_s \sim 1,2 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $Y_1 = \frac{1}{R} + jC_1\omega_s$. Sur le graphe de droite, on lit la valeur de

$\frac{1}{R} \sim 0,155 \text{ S} \rightarrow R = 6,5 \Omega$ et la valeur de $C_1\omega_s \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ S} \rightarrow C_1 \sim 3 \cdot 10^{-10} \text{ F}$

Sur le graphe de gauche, on lit $\frac{\omega_p}{\omega_s} \sim 1,07 \rightarrow \frac{C_1 + C}{C_1} \sim 1,14 \rightarrow C \sim 4 \cdot 10^{-11} \text{ F}$ Enfin, $L \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ H}$

31) $U_1 = Z'_2 J_1 \Leftrightarrow U_2 = Z'_2 m^2 J_2 \rightarrow Z'_2 = \frac{Z_2}{m^2}$; $jC'_2\omega + \frac{1}{R'_L} = m^2 \left(jC_2\omega + \frac{1}{R_L}\right) \rightarrow C'_2 = m^2 C_2$ et $R'_L = \frac{R_L}{m^2}$

32-33) $Z_{série} = R + R_s + j \left(L\omega - \frac{C_s + C}{C_s C \omega} \right)$ La résonance en courant intervient quand $\omega = \omega_r = \sqrt{\frac{C_s + C}{LC_s C}}$

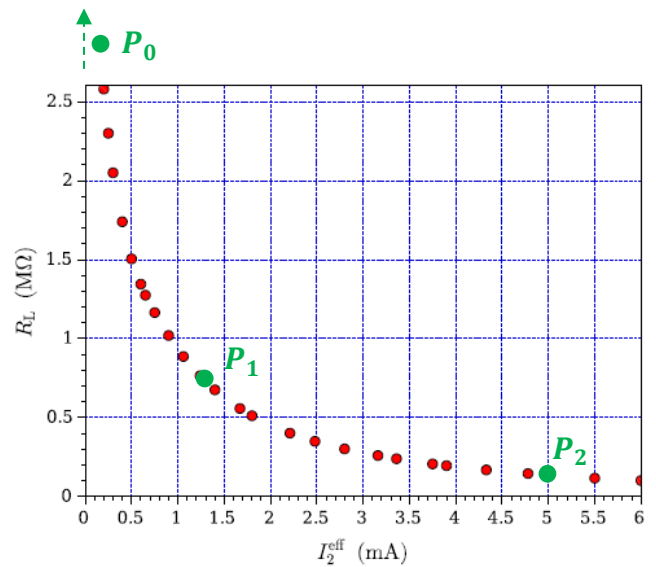
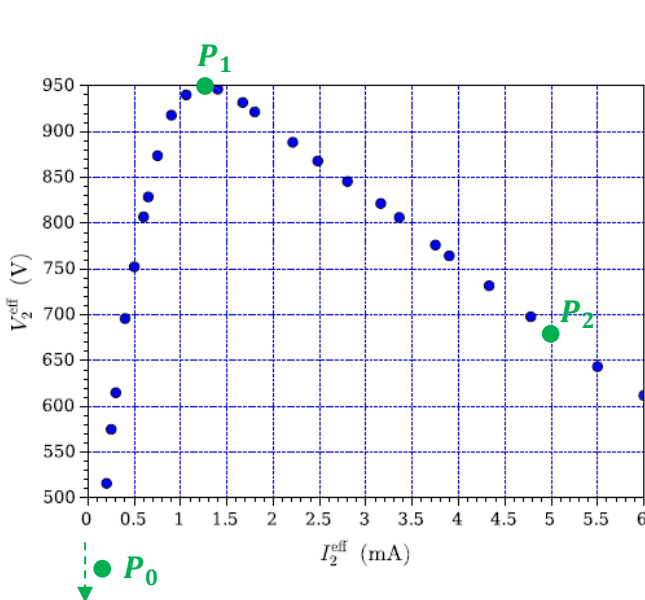
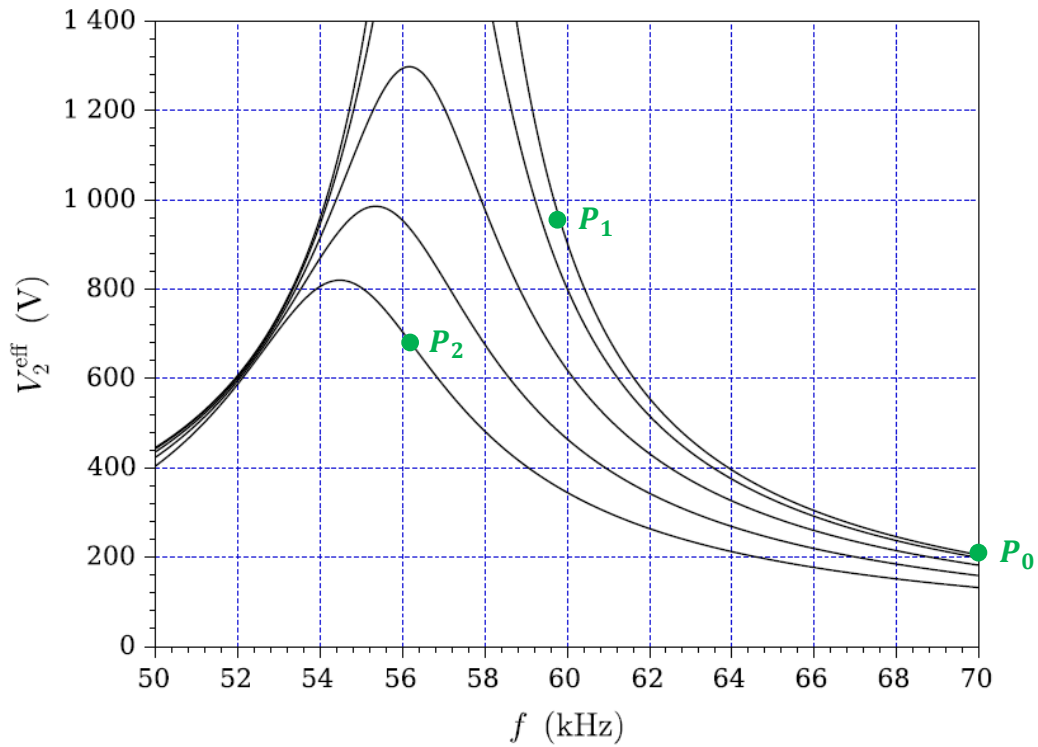
On a alors $P_2 = \frac{R_s |J_1|^2}{2} = \frac{R_s |V_1|^2}{2(R + R_s)^2}$ Cette puissance est maximale pour $R_s = R$

34) On remarque que $C_s > C_2 \gg C \rightarrow \omega_r \sim \omega_s$ et surtout $R_s = \frac{R_L}{m^2}$:

La puissance transmise à la charge R_L est maximale pour $R_L \geq R$. On voit là l'avantage du transformateur.

En son absence, on aurait une puissance maximale (bien plus faible) pour $R_L = R$.

35-37) Initialement, le courant est très faible ($< 0,2 \text{ mA}$), la résistance R_L est très grande ($> 2,5 \text{ M}\Omega$). A l'amorçage, le courant vaut environ $1,3 \text{ mA}$ donc R_L est de l'ordre de $7,5 \cdot 10^2 \text{ k}\Omega \rightarrow f_1 \sim 60^- \text{ kHz}$. Une fois la lampe allumée, on continue à diminuer la fréquence : le courant augmente, la tension et la résistance diminuent jusqu'à l'obtention du régime nominal avec $R_L = 1,4 \cdot 10^2 \text{ k}\Omega$ et $f_2 \sim 56^+ \text{ kHz}$.



38) En premier lieu, $V_2 = G_0 V_1 - RI$. Puis d'après le théorème de Millman, $V_2 = \frac{I + V_3/Z_2}{1/Z_3 + 1/Z_2}$.

On obtient donc $\frac{G_0}{R} V_1 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}\right) V_2 - \frac{V_3}{Z_2}$ D'après un diviseur de tension en sortie, $V_3 = \frac{Z_1 V_2}{Z_1 + Z_2}$.

Finalement, $\frac{G_0}{R} V_1 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}\right) \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) V_3 - \frac{V_3}{Z_2} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_2}{RZ_1} + \frac{Z_2}{Z_1 Z_3} + \frac{1}{Z_1}\right) V_3$

39) Il faut que $R_e \gg |Z_1|$ dans le domaine des fréquences exploitées.

$$\mathbf{40)} \quad RY(p) = G_0 \rightarrow \mathbf{1} + \frac{R}{Z_3(p)} + \frac{R + Z_2(p)}{Z_1(p)} + \frac{RZ_2(p)}{Z_1(p)Z_3(p)} = G_0$$

Si la partie **réelle** des solutions p est **positive** (resp. **négative**), le système est **instable** (resp. **stable**).

Si les solutions p sont **imaginaires pures**, le système peut **auto-osciller**. C'est l'objet de la suite du sujet ...

$$\mathbf{41)} \quad 1 + \frac{S_2(\omega)}{S_1(\omega)} - G_0 - jR \left(\frac{1}{S_3(\omega)} + \frac{1}{S_1(\omega)} + \frac{S_2(\omega)}{S_1(\omega)S_3(\omega)} \right) = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{G}(S_1(\omega), S_2(\omega), G_0) = \mathbf{1} + \frac{S_2(\omega)}{S_1(\omega)} - G_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{F}(S_1(\omega), S_2(\omega), S_3(\omega)) = S_1(\omega) + S_2(\omega) + S_3(\omega)$$

La valeur de R a une influence sur I donc sur V_2 mais pas sur le lien entre V_3 et V_2 . Le bouclage $V_3 = V_1$ portant sur le potentiel et non sur le courant, la condition d'auto-oscillation est indépendante de R .

$$\mathbf{42)} \quad 1 + \frac{S_2(\omega)}{S_1(\omega)} - G_0 = 0 \rightarrow \mathbf{K}_2 = G_0 - \mathbf{1} \quad S_3(\omega) = -S_1(\omega) - S_2(\omega) \rightarrow \mathbf{K}_3 = -\mathbf{1} - \mathbf{K}_2 = -G_0$$

$$\mathbf{43)} \quad Z_3 = jS_3(\omega) = -jG_0S_1(\omega) = j\frac{G_0}{C_1\omega} \quad \text{Le dipôle d'impédance } Z_3 \text{ est un condensateur de capacité } -\frac{C_1}{G_0}$$

$$\mathbf{44)} \quad S_2(\omega) = \frac{1 - G_0}{C_1\omega} > 0 \quad \text{La pulsation est très proche (par valeurs inférieures) de } \omega_p : \frac{\Delta\omega}{\omega_p} = \mathbf{10}^{-3}$$

45) Un paramètre $S_2(\omega)$ de la forme $L\omega > 0$ permettait également d'obtenir des auto-oscillations.

La plage accessible en pulsation serait beaucoup trop grande pour garantir un comportement étalon en temps. De plus, une bobine est désavantagée par ses grandes dimensions par rapport à celles d'un quartz.