

Beaucoup d'inégalités en proba :

Exercice 1.

- a) Montrer que si a et b dans $\mathbb{R}^{++}$ sont tels que $1/a + 1/b = 1$ alors pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^{++})^2$,

$$uv \leq \frac{u^a}{a} + \frac{v^b}{b}$$

- b) En déduire que si $X, Y \in \mathcal{V}_d(\Omega, \mathbb{R})$ admettent un moment d'ordre k alors pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $X^i Y^{k-i}$ admet une espérance et conclure que $(X + Y)$ admet un moment d'ordre k .
 c) En déduire aussi que si on note $\mathcal{L}_d^k(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des v.a.d. admettant un moment d'ordre k , alors $\mathcal{L}_d^k(\Omega, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.

Exercice 2. Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2.

Démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{P}(X > 0)}$$

Exercice 3. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que :

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$$

Indication - On pourra penser à ces probabilités comme à des espérances d'indicatrices.

Exercice 4 (Inégalité de Jensen en proba). Soit X une v.a.d. réelle admettant une espérance et f sur une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. On suppose aussi que $f(X)$ admet une espérance.

On veut montrer qu'alors que $\mathbb{E}(f(X)) \geq f(\mathbb{E}(X))$ (*)

- a) Montrer ce résultat dans le cas particulier où X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, à l'aide de l'inégalité de Jensen du programme.
 b) Dédurre le résultat annoncé (*) pour toute v.a.d. X par un passage à la limite à justifier soigneusement.
 c) Une preuve différente du cas général (donne notamment une preuve sans réc. de Jensen du programme!) :
 (i) On suppose d'abord que f est dérivable. Si x_0 est un réel, justifier qu'il existe une fonction affine g telle que $g(x_0) = f(x_0)$ et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq f(x)$. En écrivant $g(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$ et en choisissant $x_0 = \mathbb{E}(X)$, conclure qu'on a l'inégalité (*) en appliquant les propriétés de l'espérance.
 (ii) Montrer que même si f n'est pas dérivable en x_0 , il existe bien une fonction affine g comme au (i), ce qui donne (*) sans hypothèse de dérivabilité pour f .

Exercice 5 (Inégalité de concentration sous-gaussienne). **N.B.** On appelle *inégalité de concentration* toute inégalité qui à l'instar de l'I.B.T., permet d'estimer l'écart entre une v.a. et son espérance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires intégrables mutuellement indépendantes, s'écrivant sous la forme $X_k = a_k Y_k$, avec $a_k \in \mathbb{R}$ et Y_k de Rademacher : $\mathbb{P}(Y_k = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(Y_k = -1) = 1/2$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ leur somme, et $\sigma_n = (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2}$.

- a) Que représente σ_n^2 du point de vue probabiliste ?
 b) Soit $t \in \mathbb{R}$; calculer $\mathbb{E}[e^{tS_n}]$.
 c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\cosh(t) \leq e^{t^2/2}$, et en déduire

$$\mathbb{E}[e^{|tS_n|}] \leq 2 \exp\left(\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}\right)$$

puis que, pour a et t strictement positifs

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2 \exp\left(\frac{\sigma_n^2 t^2}{2} - ta\right)$$

- d) Montrer que, pour tout $\mu > 0$, on a l'inégalité de concentration sous-gaussienne (appelée aussi inégalité de Chernoff) :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \mu \sigma_n) \leq 2 \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\right)$$

Dans le cas particulier où les a_k font 1, pour la marche aléatoire symétrique, en déduire que pour tout $a > 0$:

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq a) \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$$

Espérance, variance.. loi... dans cet ordre !

Exercice 6 (Pour le nombre de points fixe d'une permutation aléatoire). On considère l'univers $\Omega = S_n$ de toutes les permutations de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. Pour chaque σ dans S_n , on note $X(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ .

- a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ autrement dit le nombre moyen de points fixes d'une permutation $\sigma \in S_n$.
Indication – Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pourra considérer l'indicatrice de l'événement $A_i : \ll i \text{ est un point fixe de la permutation tirée.} \gg$

Version plus mondaine : n couples mariés arrivent à un bal et chaque cavalier choisit une cavalière aléatoirement. Quel est le nombre moyen de couples mariés qui vont danser ensemble ?

- b) Calculer aussi $\mathbb{V}(X)$.
c) **Retour sur la loi (plus difficile) :** à l'aide par exemple du principe d'inclusion-exclusion (ou formule de Poincaré, ou du crible, qui est un exercice en soi, donnant $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ en fonction des probas des différentes intersections des A_i), expliciter la loi de X (chaque $P(X = k)$ s'écrira comme une somme). Ce calcul cependant ne permet pas facilement d'en déduire l'espérance (et a fortiori la variance) de X .
d) **Comportement asymptotique**

Idee : si les v.a. $X_i = 1_{A_i}$ introduite dans l'indication du a) étaient indépendantes, alors X suivrait une loi $\mathcal{B}(n, 1/n)$ et quand $n \rightarrow +\infty$, la loi de X convergerait avec une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. (résultat sur la loi limite de loi binomiale ici avec $n \times p_n = n \times 1/n = 1$.).

Ici, il n'est pas vrai que les v.a. X_i sont indépendantes (cf. le calcul du b)), mais :
montrer qu'il est quand même vrai que la loi de X converge, quand $n \rightarrow +\infty$, vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$

Exercice 7. Soient $(X_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi définie par $P(X_{i,j} = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}$. On considère la variable aléatoire $D = \det(M)$ où M est la matrice aléatoire dont les entrées sont les $X_{i,j}$.

- a) **Maths :** déterminer l'espérance et la variance de la v.a. D .
b) Expérimentation statistique avec Python (à l'aide de la documentation de Centrale) :
i) écrire une fonction `test` qui prend en paramètre un entier `n` et qui renvoie la valeur d'une matrice `M` aléatoire comme définie ci-dessus de taille `n`.
ii) Pour `N=10000` et `n=5` (par exemple), calculer la moyenne statistique des résultats de `N` `test`, qui doit s'approcher (on l'espère) de l'espérance de D .
Comment obtenir `var(D)` à partir d'une moyenne statistique ?
c) Une calcul avec la formule de l'espérance mathématique :
i) Ecrire une fonction `Univers` qui reçoit un entier `n` (petit !) en paramètre et retourne la liste de toutes les matrices de tailles $n \times n$ ayant comme entrées des 1 et des -1.
ii) En déduire le calcul de l'espérance mathématique et de la variance avec Python . (Le nombre de calculs étant très grand, on se limitera à `n=4`).

Applications de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev

Exercice 8 (Cf Banque CCINP 99). On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Le nombre *moyen* de tirages donnant un 6 est $n/6$ (au sens de l'espérance). On demande comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 entre 0 et $n/3$ soit supérieure à 0,9 puis à 0,99. Pour cela,

a) donner une condition suffisante sur n à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b) En notant X_n le nombre de 6 obtenus après n tirages, donner une formule exacte pour $P(X_n \in [0, n/3])$ et déterminer à l'aide de Python la plus petite valeur de n donnant ce résultat.

Exercice 9. A l'aide de l'I.B.T. montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geq \frac{n-1}{n} 2^{4n}$.

Séries génératrices

Exercice 10. Soit (X_n) une suite de v.a. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ indépendantes de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre p . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la v.a. S_k définie par :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

a) Calculer la fonction génératrice de S_k .

b) En déduire que S_n suit une loi dite « binomiale négative » i.e. $P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exercice 11. On lance deux dés à six faces. Le résultat affiché par le i -ième dé est une variable aléatoire X_i et on note $Y = X_1 + X_2$.

Montrer que dès qu'au moins un dé est pipé, la loi de Y sera *toujours* différente de la loi obtenue pour deux dés non pipés.

La « méthode probabiliste »

Cette méthode permet de démontrer l'existence d'un objet mathématique qui n'a a priori rien à voir avec des proba, en montrant qu'on peut lui associer un événement de proba non nulle.

Exercice 12. Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien. Dans tout l'exercice $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E .

a) On suppose, dans cette question seulement, que $(v_1, \dots, v_n)$ sont deux à deux orthogonaux. Calculer pour tout uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ la norme :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\|^2$$

b) Désormais on ne suppose plus que $(v_1, \dots, v_n)$ sont orthogonaux. Montrer que si l'application :

$$\begin{aligned} \{-1, 1\}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &\mapsto \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\|^2 \end{aligned}$$

est constante, alors $(v_1, \dots, v_n)$ sont orthogonaux.

c) Soit $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ quelconque.

On considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telles que :

$$\forall i = 1, \dots, n, \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2.$$

On s'intéresse à la variable aléatoire :

$$U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+, \omega \mapsto \left\| \sum_{i=1}^n X_i(\omega) v_i \right\|^2.$$

Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(U)$.

d) En déduire que si $v_1, \dots, v_n$ ne sont pas orthogonaux alors il existe un uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\| > \sqrt{n}.$$