

Banque CCINP : Ex. 33, 41, 52, 56, 57, 58.

Continuité, caractère $\mathcal{C}^1$, de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ « concrètes »

Exercice 1. Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)$.

- a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ entier.
- b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ entier.
- c) La fonction f admet-elle une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0, 0)$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Montrer que les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (on dira que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$).

Exercice 3. Soit $f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$. Montrer que :

- a) f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$,
- b) f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- c) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- d) donner une écriture sans $\sum$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

Calculs de Différentielles

Exercice 4 (Exemples traités en cours mais on insiste car tous cruciaux!).

- a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Expliciter $df(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- b) Soit E un espace vectoriel euclidien, et $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne. Montrer que cette application norme de $E \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^+$ est différentiable et calculer sa différentielle de deux manières : **(M1)** en coordonnées. **(M2)** sans coordonnées, en reliant la norme au produit scalaire, et en utilisant la linéarité du p.s.
- c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et (en identifiant $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$), $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (Ax|x)$. Calculer $df(x)$ et $\nabla f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. Que dire dans le cas où A est une matrice symétrique ?
- d) Calculer le gradient de l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (pour le p.s. can.) et en déduire la différentielle du déterminant.

Exercice 5. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$

- a) Soit $f : E \rightarrow E, M \mapsto M^3$. Calculer $df(M).H$ pour tout $(M, H) \in E^2$.
- b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \operatorname{Tr}(M^k)$. Calculer $d\varphi(M)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Utilisations, nombreuses, de la formule de dérivation le long d'une courbe

Exercice 6 (les a) et b) sont des résultats de cours).

- a) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que l'application $x \mapsto df(x)$ est identiquement nulle. Montrer que f est constante grâce à la méthode de dérivation le long d'une courbe (ici le long du segment reliant deux points x et y).
- b) Montrer le même résultat si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ où U est un ouvert connexe par arc de $\mathbb{R}^n$.
Pour cela, on admettra qu'un ouvert c.p.a. est en fait « connexe par arcs $\mathcal{C}^1$ ».
- c) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que l'application $x \mapsto df(x)$ est constante.
Montrer que f est une *application affine* c'est-à-dire que $g : x \mapsto f(x) - f(0)$ est linéaire.

Exercice 7 (L'I.A.F. en variable vectorielle qui n'est bizarrement pas au programme alors qu'elle est naturelle avec la norme d'opérateur). Soit U un ouvert de E et $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$. On suppose qu'il existe une boule fermée $B_f(a, r) \subset U$ et un réel positif M tel que :

$$\forall x \in B_f(a, r), \|df(x)\| \leq M.$$

Montrer que $f|_{B_f(a, r)}$ est M -lipschitzienne.

Indication – Rappelons qu'au chap. D1 on a vu l'I.A.F. pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles. On s'y ramènera ici le long d'un segment.

Propriétés des fonctions convexes

Exercice 8. Soit Ω un ouvert convexe de $E = \mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

On dit que f est convexe sur Ω ssi $\forall (a, b) \in \Omega^2, \forall t \in [0, 1], f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

Caractérisation à l'aide des fonctions d'une variable :

Pour tout $a \in \Omega$ et tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $I_{a,x} = \{t \in \mathbb{R}, a + tx \in \Omega\}$.

On pose $\varphi_{a,x} : I_{a,x} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + tx)$.

Montrer que f est convexe sur Ω si, et seulement si, toutes les fonctions $\varphi_{a,x}$ pour $a \in \Omega$ et $x \in E$ sont convexes.

Exercice 9 (Cas d'une fonction strictement convexe continue coercive). Soit E un e.v.n. de dim. finie et C un sous-ensemble convexe de E . Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *strictement convexe* sur C ssi pour tout $(a, b) \in C^2$ avec $a \neq b$ et pour tout $t \in]0, 1[$, $f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$. On suppose au a) et b) que f est stmt convexe sur C .

- Montrer que si f admet minimum dans C alors celui-ci est atteint en un unique point.
- On suppose $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe et coercive sur $\mathbb{R}^n$ ce qui signifie que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que f admet un minimum atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$.
- Exemple concret : on identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et on considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c$ avec A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
Montrer que f admet un minimum dans $\mathbb{R}^n$, atteint en un unique point $\bar{x}$.

Dérivées secondes

Exercice 10 (Contre-exemple au théorème de Schwarz). Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on pose $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$. On pose $f(0, 0) = 0$.

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$ existent et ne sont pas égales.

Exercice 11. a) Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, et $c \in \mathbb{R}$, on pose $f : x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax|x \rangle + \langle b|x \rangle + c$.

Déterminer la hessienne $H_f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Soit r une fonction deux fois différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $g(x) = r(x)^2$. Calculer la hessienne $H_g(x)$ en fonction de r en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 12. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

a) Pour tout $a \in U$ et tout $v \in E$, on note $I_{a,v} = \{t \in \mathbb{R}, a + tv \in U\}$ et $\varphi_{a,v} : I_{a,v} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + tv)$.

Montrer que f est convexe sur U ssi pour tout $(a, v) \in U \times E$, $\varphi_{a,v}$ est convexe sur $I_{a,v}$.

b) Montrer que f est convexe sur U ssi $\forall x \in U, H_f(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Etude concrète d'extrema sur un ouvert

Exercice 13 (IMT MP 2024). Étudier les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 + 4xy + 1$.

Exercice 14 (Reprise du DM 12). Démontrer que $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$ admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

Exercice 15 (Points où la hessienne dégénère, ici le long d'une droite critique). Étudier les extrema locaux de

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy^2 + \ln(4 + y^2).$$

Equations aux dérivées partielles

Exercice 16. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\}$. On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x, y) = (x^2 - 2xy - y^2, y).$$

- Déterminer $\Omega' = \varphi(\Omega)$.
- Vérifier que Ω et Ω' sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $\varphi|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \Omega'$ est une bijection $\mathcal{C}^1$. On admet pour la suite que sa réciproque est aussi $\mathcal{C}^1$.
- On veut déterminer l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles (E.D.P.) E suivant :

$$\forall (x, y) \in \Omega, (x + y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x - y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (E).$$

Trouver l'E.D.P. (E') vérifiée par la fonction $g = f \circ \varphi^{-1}$ sur Ω' .

- Peut-on conclure de la question d) que les solutions g de l'E.D.P. (E') du d) sont les fonctions de la forme $g : (u, v) \in \Omega \mapsto h(u)$?
- Comment caractériser plutôt les fonctions g solutions de (E') et donc les fonctions f solutions de (E) ?

Exercice 17 (Potentiels centraux $F(x_1, \dots, x_n) = f(r)$ harmoniques). Déterminer les $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que : si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $F(x_1, \dots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$, on ait $\Delta F = 0$ i.e. $\sum_{i=1}^n \partial^2 F / \partial x_i^2 = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Exercice 18 (Centrale 2025 : solutions de l'équations de la chaleur). On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

Soit $K : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ et $U : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_{\mathbb{R}} K(x-y, t) f(y) dy$. a) Montrer que, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t)$. b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} f(x)$.

Etude d'extrema sur des fermés, extrema sous contrainte

Exercice 19 (IMT 2025). Soient $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0 \text{ et } 0 \leq x + y \leq 1\}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy(1 - x - y)$. Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur K et les déterminer.

Exercice 20 (CCINP 2025 : démonstration par le calcul diff. qu'une matrice symétrique réelle admet une v.p. réelle). On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et f, g définies sur $\mathbb{R}^n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \langle u(x), x \rangle$ et $g(x) = \|x\|^2 - 1$.

- On pose $K = g^{-1}\{0\}$. Montrer que K est compact.
- Montrer que $f|_K$ admet un maximum en $a \in K$.
- Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.
- Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.
- Montrer que a est un vecteur propre de u .

