

D.S. 7 Centrale PC 2022 : une solution

I. Généralités sur les matrices symétriques réelles

- Q1)** Si A est orthodiagonalisable, alors $A = PDP^T$ avec D diagonale et P orthogonale, puis $A^T = (PDP^T)^T = PD^T P^T = PDP^T = A$ puisque $D^T = D$ et $(P^T)^T = P$, donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Inversement, toute matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable, c'est la version matricielle du théorème spectral.

Il ne s'agit certainement pas de démontrer le théorème spectral ici

- Q2)** On remarque que $C_1(A_1) + C_3(A_1) = A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_1 associé à la valeur propre $\lambda_1 = 7$.

- Q3)** a) La matrice $A_1 - 7I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ est visiblement de rang 1, donc par le théorème du rang, $\dim(E_7(A_1)) = 2$, et $E_7(A_1)$ est le plan d'équation cartésienne $2x + y - 2z = 0$, on peut aussi le décrire par $E_7(A_1) = \text{Vect}(X_1, X_2)$ avec $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Comme A_1 est symétrique réelle, elle est (ortho)diagonalisable, et la somme de ses valeurs propres (réelles) est égale à sa trace. On a le nombre 7 comme valeur propre double, et il reste une valeur propre simple λ_2 telle que $2 \times 7 + \lambda_2 = \text{tr}(A_1) = 12$, donc $\lambda_2 = -2$. Ainsi, $\text{sp}(A_1) = \{-2, 7\}$, avec -2 simple et 7 double.

- Q4)** Les sous-espaces propres de A_1 sont deux à deux orthogonaux car la matrice est symétrique réelle, on déduit ici que $E_{-2}(A_1) = (E_7(A_1))^\perp = \text{Vect}(X_3)$ avec $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ainsi, (X_1, X_2, X_3) constitue une base orthogonale de vecteurs propres de A_1 , il ne reste plus qu'à normaliser ces vecteurs pour orthodiagonaliser A_1 . On a donc

$$A_1 = PDP^T = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Q5)** D'abord φ est une forme bilinéaire par bilinéarité du produit des polynômes et linéarité de l'intégrale, et symétrique par commutativité du produit sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, positive car $\varphi(P, P) = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive.
Enfin, si $\varphi(P, P) = 0$, alors la fonction $t \mapsto P(t)^2$ étant continue d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, elle est nulle sur $[0, 1]$ donc le polynôme P , qui a une infinité de racines, est le polynôme nul. Ceci assure le caractère défini de φ , qui est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- Q6)** Pour $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$, on a $h_{i,j} = \varphi(X^i, X^j) = \int_0^1 t^{i+j} dt = \frac{1}{i+j+1}$, donc

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Culture : la notation H vient du fait que cette matrice est appelée *matrice de Hilbert*. C'est la matrice de Gram de la base canonique pour ce produit scalaire, elle a la particularité d'avoir un calcul d'inverse très instable numériquement.

Q7) Par le calcul usuel du cours sur les formes bilinéaires symétriques, en posant $U = (u_0 \ \dots \ u_{n-1})^\top$,

$$U^\top H U = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} h_{i,j} u_i u_j = \sum_{(i,j) \in [0, n-1]^2} \varphi(X^i, X^j) u_i u_j.$$

Q8) L'appartenance de H à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est immédiate. Reste à montrer que H est *positive*.

(M1) Si on poursuit le calcul obtenu en Q7., on note que, par bilinéarité de φ ,

$$U^\top H U = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(u_i X^i, u_j X^j) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i, \sum_{j=0}^{n-1} u_j X^j\right) = \varphi(P_U, P_U)$$

en introduisant le polynôme $P_U = \sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Si λ est une valeur propre de H , si $U = (u_0 \ \dots \ u_{n-1})^\top$ est un vecteur propre associé, on a alors $HU = \lambda U$, puis $U^\top H U = \lambda U^\top U = \lambda \|U\|^2 = \varphi(P_U, P_U) > 0$ puisque P_U n'est alors pas le polynôme nul, donc $\lambda = \frac{\varphi(P_U, P_U)}{\|U\|^2} > 0$.

(M2) Si on est plus savant sur les matrices de Gram, en notant \mathcal{B} une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour le p.s. φ , A la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $1, X, \dots, X^{n-1}$ dans cette base \mathcal{B} alors par calcul du p.s en b.o.n. on constate que :

$$H = A^\top \cdot A.$$

Mais alors $U^\top A^\top A U = \|AU\|^2 \geq 0$ pour tout vecteur colonne U .

Q9) Si A est nilpotente, alors la matrice A ne peut être inversible puisque $A^p = 0_n$, donc $0 \in \text{sp}(A)$, et $\text{sp}(A) \neq \emptyset$.

D'autre part, si un réel λ appartient à $\text{sp}(A)$, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre associé, on a $X \neq 0$ et $A^p X = \lambda^p X = 0$ donc $\lambda^p = 0$ puis $\lambda = 0$, ce qui prouve que $\text{sp}(A) \subset \{0\}$. Donc $\rho(A) = 0$.

Q10) L'ensemble C est la sphère de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

(M1) et il est inscrit dans le programme que toute sphère est une partie fermée.

(M2) $C = f^{-1}(\{1\})$ où $f : U \mapsto U^\top U$ est continue par continuité de la transposition (linéaire en dim. finie) et du produit.

Donc C est fermé dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ comme préimage du fermé $\{1\}$ de \mathbb{R} par la fonction continue f

Q11) D'une part C est fermé par Q9 et borné (vecteurs tous de norme 1), donc dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ev. de DIM FINIE, C est Compact.

D'autre par l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ U & \mapsto |U^\top A U| \end{cases}$ est continue. En effet, l'application

$\alpha : U \mapsto AU$ est continue car c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $\beta : (U, V) \mapsto U^\top V = (U | V)$ est continue car c'est une forme bilinéaire sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, enfin la valeur absolue $v : x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} , donc $\varphi : U \mapsto v(\beta(U, \alpha(U)))$ est continue par composition.

D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet donc un maximum sur le compact C de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q12) En supposant toujours $\text{sp}(A) \neq \emptyset$, il existe une valeur propre réelle de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, soit U un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre. Alors $U \in C$ et $AU = \lambda U$, puis $U^\top AU = \lambda U^\top U = \lambda$ et $|U^\top AU| = \rho(A)$, donc $\rho(A) \leq \max_{U \in C} |U^\top AU|$.

Q13) Si A est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable : soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une b.o.n. de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ (et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Alors si $U = \sum_{i=1}^n u_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ est de norme 1, on a $AU = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \varepsilon_i$ et $U^\top AU = (U | AU) =$

$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Donc :

$$|U^\top AU| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| x_i^2 \leq \rho(A) \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \rho(A).$$

Donc $\max_{U \in C} |U^\top AU| \leq \rho(A)$, puis l'égalité grâce à Q12.

Q14) $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, en reprenant les notations introduites dans la question précédente, alors

$$U^\top AU = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

puisque les λ_i sont positifs. Donc $|U^\top AU| = U^\top AU$ et $\max_{U \in C} (U^\top AU) = \rho(A)$.

Q15) On a bien $\rho(A) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ensuite

(i) $\rho(A) = 0 \iff \max_{\lambda \in \text{sp}(A)} |\lambda| = 0 \iff \text{sp}(A) = \{0\}$, ce qui équivaut à $A = 0_n$ puisque A est diagonalisable, d'où l'axiome de séparation.

(ii) Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\text{sp}(\alpha A) = \alpha \text{sp}(A) = \{\alpha \lambda; \lambda \in \text{sp}(A)\}$, donc

$$\rho(\alpha A) = \max_{\lambda \in \text{sp}(A)} (|\alpha| |\lambda|) = |\alpha| \cdot \max_{\lambda \in \text{sp}(A)} |\lambda| = |\alpha| \rho(A),$$

d'où l'homogénéité.

(iii) Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $C \in U$, on a

$$|U^\top (A+B)U| = |U^\top AU + U^\top BU| \leq |U^\top AU| + |U^\top BU| \leq \rho(A) + \rho(B).$$

Cette majoration étant valable pour tout $U \in C$, on déduit que $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ grâce à Q13., soit l'inégalité triangulaire. Donc ρ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Q16) La matrice Σ_Y est symétrique puisque $\sigma_{j,i} = \text{cov}(Y_j, Y_i) = \text{cov}(Y_i, Y_j) = \sigma_{i,j}$. De plus, $\sigma_{i,j} = \text{cov}(Y_i, Y_j) = \text{E}((Y_i - \text{E}(Y_i))(Y_j - \text{E}(Y_j)))$ est l'espérance de la variable aléatoire réelle $(Y_i - \text{E}(Y_i))(Y_j - \text{E}(Y_j))$, qui est bien le coefficient d'indices (i, j) de la matrice produit des matrices $(Y - \text{E}(Y))(Y - \text{E}(Y))^\top$, (matrice colonne \times matrice ligne) ce que l'on peut écrire

$$\Sigma_Y = \text{E}((Y - \text{E}(Y))(Y - \text{E}(Y))^\top).$$

Si $U = (u_1 \ \dots \ u_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur constant, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient d'indices (i, j) de Σ_{Y+U} est, par bilinéarité de la covariance,

$$\text{cov}(Y_i + u_i, Y_j + u_j) = \text{cov}(Y_i, Y_j) + \text{cov}(Y_i, u_j) + \text{cov}(u_i, Y_j) + \text{cov}(u_i, u_j) = \sigma_{i,j}$$

puisque la covariance de deux variables aléatoires réelles, dont une est constante, est nulle. Ainsi, $\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y$.

Q17) Posons $Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_1(\omega) \\ \vdots \\ Z_p(\omega) \end{pmatrix}$ pour tout $\omega \in \Omega$, et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$. Les variables aléatoires réelles Z_1, \dots, Z_p sont combinaisons linéaires des Y_j , plus précisément

$$Z_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} Y_j$$

pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Par linéarité de l'espérance, chaque Z_i est d'espérance finie et $\text{E}(Z_i) = \sum_{j=1}^n m_{i,j} \text{E}(Y_j)$, ce qu'on peut écrire matriciellement

$$\text{E}(Z) = M \cdot \text{E}(Y)$$

Les variables aléatoires réelles Y_j ont un moment d'ordre deux fini (i.e. "admettent une variance"), on sait donc (comme \mathcal{L}_d^2 est un \mathbb{R} -ev) qu'il en est de même de toute combinaison linéaire de ces variables donc $\text{cov}(Z_i, Z_j)$ existe bien pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ puis, par bilinéarité de la covariance,

$$\text{cov}(Z_i, Z_j) = \text{cov}\left(\sum_{k=1}^n m_{i,k} Y_k, \sum_{l=1}^n m_{j,l} Y_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{i,k} \sigma_{k,l} m_{j,l}$$

On reconnaît l'écriture du coefficient d'indices (i, j) de la matrice produit $M \Sigma_Y M^\top$ (cf. Q7) Donc $\Sigma_Z = M \Sigma_Y M^\top$.

- Q18)** . L'orthodiagonalisation de la matrice symétrique Σ_Y s'écrit $\Sigma_Y = PDP^T$, où la matrice diagonale $D = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ porte les valeurs propres de Σ_Y . Comme P est orthogonale, on a $D = P^T \Sigma_Y P = \Sigma_X$ d'après Q17. Donc $\Sigma_X = D$ est diagonale.
- Q19)** Les matrices Σ_Y et Σ_X sont semblables, donc ont les mêmes valeurs propres. Or, les valeurs propres de la matrice diagonale Σ_X sont ses coefficients diagonaux $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$, qui sont les variances $V(X_i)$, donc qui sont positifs. Ainsi, $\text{sp}(\Sigma_Y) \subset \mathbb{R}_+$.
- Q20)** Les matrices Σ_X et Σ_Y sont semblables, donc ont la même trace. Donc les vecteurs aléatoires X et Y ont la même variance totale :

$$V_T(X) = \text{tr}(\Sigma_X) = \text{tr}(\Sigma_Y) = V_T(Y)$$

- Q21)** Il suffit de considérer n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes Z_1, \dots, Z_n , de variances respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, par exemple des variables de Poisson de paramètres λ_i (ou une variable aléatoire constante si $\lambda_i = 0$). On a alors $\Sigma_Z = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
- Q22)** On orthodiagonalise A , soit $A = PDP^T$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les λ_i étant positifs. D'après Q21., il existe un vecteur aléatoire Z à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\Sigma_Z = D$. Le vecteur aléatoire $Y = PZ$ vérifie alors $\Sigma_Y = P\Sigma_Z P^T = PDP^T = A$.

- Q23)** X est une variable aléatoire réelle, $X = \sum_{i=1}^n u_i Y_i$ en posant $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$. Donc X est une combinaison linéaire de variables aléatoires réelles admettant une variance, elle admet donc aussi une variance et

$$V(X) = \text{cov} \left(\sum_{i=1}^n u_i Y_i, \sum_{j=1}^n u_j Y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \text{cov}(Y_i, Y_j) = U^T \Sigma_Y U$$

Remarque. Avec les mêmes notations, $E(X) = U^T E(Y)$. En effet, par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = E \left(\sum_{i=1}^n u_i Y_i \right) = \sum_{i=1}^n u_i E(Y_i) = (U | E(Y)) = U^T E(Y)$$

on s'en servira en Q27.

- Q24)** Si $r = n$, c'est trivial puisqu'alors $\text{Im}(\Sigma_Y) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $\{Y - E(Y) \in \text{Im} \Sigma_Y\}$ est l'événement certain.
- Q25)** C'est une propriété générale du cours sur les matrices symétriques réelles.
- (i) Montrons déjà que si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors les sous-espaces $\text{Ker}(S)$ et $\text{Im}(S)$ sont orthogonaux : si $V \in \text{Im}(S)$ et $W \in \text{Ker}(S)$, soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $V = SU$, alors $(V | W) = (SU | W) = (U | S^T W) = (U | SW) = 0$.
- (ii) Cette orthogonalité entraîne que ces deux sous-espaces sont en somme directe i.e. $\text{Ker}(S) \cap \text{Im}(S) = \{0\}$.
- (iii) Enfin, le théorème du rang permet de conclure qu'ils sont supplémentaires : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(S) \oplus \text{Im}(S)$.

- Q26)** Introduisons le vecteur constant $U = E(Y)$, alors d'après Q23., pour tout $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$,

$$V(V_j^T(Y - E(Y))) = V(V_j^T(Y - U)) = V_j^T \Sigma_{Y-U} V_j = V_j^T \Sigma_Y V_j$$

en utilisant la fin de Q16. Enfin, $V_j \in \text{Ker}(\Sigma_Y)$ donc $\Sigma_Y V_j = 0$ et $V(V_j^T(Y - E(Y))) = 0$.

- Q27)** La variable aléatoire réelle $V_j^T(Y - E(Y))$, de variance nulle, est donc presque sûrement constante. Mais son espérance est nulle d'après la remarque à la fin de Q23. puisque

$$E(V_j^T(Y - E(Y))) = V_j^T \cdot E(Y - E(Y)) = V_j^T \cdot 0 = 0$$

Cette variable aléatoire est donc presque sûrement nulle.

Q28) En utilisant Q25., on observe que

$$\{Y - E(Y) \in \text{Im } \Sigma_Y\} = \{Y - E(Y) \in (\text{Ker } \Sigma_Y)^\perp\} = \bigcap_{j=1}^d \{V_j^\top (Y - E(Y)) = 0\}$$

Or, il résulte de la sous-additivité d'une probabilité qu'une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables (i.e. de probabilité nulle) est encore négligeable et, par passage à l'événement contraire, on déduit que toute intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est encore presque sûre. Donc

$$P(Y - E(Y) \in \text{Im } \Sigma_Y) = 1$$

Q29) Soit $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$, où Y_1, Y_2, Y_3 sont trois variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, de variances respectives 9, 5 et 4. Alors $\Sigma_Y = A_2$. On peut aussi se contenter d'invoquer Q21.

Q30) Pour tout $U \in C$, on a $q_Y(U) = U^\top \Sigma_Y U = U^\top A_2 U$ d'après Q23. Comme A_2 est symétrique à valeurs propres positives, il résulte alors de Q14. que

$$\max_{U \in C} q_Y(U) = \rho(A_2) = \max(\text{sp}(A_2)) = 9.$$

Q31) Comme Σ_Y est symétrique à valeurs propres positives, il résulte de Q14. toujours que $q_Y(U) = U^\top \Sigma_Y U = |U^\top \Sigma_Y U|$ pour tout $U \in C$, l'existence d'un maximum de q_Y sur C est donc précisément la question Q11. De Q14., on déduit que $\max_{U \in C} q_Y(U) = \rho(\Sigma_Y) = \max(\text{sp}(\Sigma_Y))$. Comme en Q12., si λ est la plus grande valeur propre de Σ_Y (ici, elles sont toutes réelles positives), si $U_0 \in C$ est un vecteur propre associé, alors $q_Y(U_0) = \lambda = \rho(\Sigma_Y) = \max_{U \in C} q_Y(U)$, donc :

$$\max_{U \in C} V(U^\top Y) = V(U_0^\top Y)$$

Q32) L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance qui est une forme bilinéaire symétrique positive sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ dit que

$$\text{cov}(Y_1, Y_2)^2 \leq V(Y_1) V(Y_2)$$

autrement dit avec les notations ici :

$$\sigma_{1,2}^2 \leq \sigma_{1,1} \sigma_{2,2}$$

donc avec l'hypothèse de cette partie

$$\sigma^4 \gamma^2 \leq \sigma^4,$$

ce qui entraîne $\gamma^2 \leq 1$, puis $\gamma \leq 1$.

D'autre part, par définition :

$$\Sigma_Y = \sigma^2 (\gamma J + (1 - \gamma) I_n).$$

Q33) La matrice J est symétrique donc diagonalisable, elle est de rang 1 donc elle admet 0 comme valeur propre avec un sous-espace propre $E_0(J) = \text{Ker}(J)$ de dimension $n - 1$ par le théorème du rang. Enfin, sa trace est n , donc n est valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension 1, et $\text{sp}(J) = \{0, n\}$. En posant $V = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^\top$, on a $JV = nV$, donc V est un vecteur propre de J associé à sa valeur propre de module maximal, à savoir n .

Q34) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si a et b sont deux réels, V est vecteur propre de A pour la valeur propre λ si, et seulement si V est vecteur propre de $aA + bI$ pour la valeur propre $\lambda a + b$. Donc :

$$\text{sp}(aA + bI_n) = \{a\lambda + b; \lambda \in \text{sp}(A)\}.$$

L'expression de Σ_Y obtenue en Q32. et l'étude du spectre de J faite en Q33. montrent alors que

$$\text{sp}(\Sigma_Y) = \{\sigma^2(1-\gamma), \sigma^2(1+(n-1)\gamma)\}.$$

Donc $\rho(\Sigma_Y) = \max(\text{sp}(\Sigma_Y)) = \sigma^2(1+(n-1)\gamma)$. D'après Q31., pour maximiser q_Y sur C , on prend un vecteur propre unitaire de Σ_Y associé à la valeur propre maximale $\rho(\Sigma_Y)$, et l'expression de Σ_Y en fonction de J nous montre qu'il suffit pour cela de prendre un vecteur propre unitaire de J associé à sa valeur propre maximale n . En prenant

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}V = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a un vecteur $U_0 \in C$ tel que $q_Y(U_0) = \max_{U \in C} q_Y(U)$, ce que l'on recherchait.

Q35) D'après Q31., on a $V(Z) = V(U_0^\top Y) = \rho(\Sigma_Y) = \sigma^2(1+(n-1)\gamma)$, alors que

$$V_T(Y) = \text{tr}(\Sigma_Y) = n\sigma^2, \quad \text{donc} \quad \frac{V(Z)}{V_T(Y)} = \frac{1+(n-1)\gamma}{n} = 1 - (1-\gamma) \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Q36) La partie C' est bornée car incluse dans C , fermée comme intersection de deux fermés puisque $C' = C \cap (\text{Vect}(U_0))^\perp$, non vide car il existe dans l'hyperplan $(\text{Vect}(U_0))^\perp$ des vecteurs unitaires. Donc C' est un compact car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dim. finie.

L'application $q_Y : U \mapsto U^\top \Sigma_Y U$ est toujours continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et q_Y admet un maximum sur le compact C' par le théorème des bornes atteintes.

Q37) soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une b.o.n. de \mathbb{R}^n l'endomorphisme $X \mapsto \Sigma_Y X$ (et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$).

Alors si $U = \sum_{i=1}^n u_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ est de norme 1, on a $\Sigma_Y U = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \varepsilon_i$ et

$$q_Y(U) = U^\top \Sigma_Y U = (U | \Sigma_Y U) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Avec cette écriture, on retrouve que $q_Y(U) \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_1 = \rho(\Sigma_Y)$, et que cette valeur est atteinte si et seulement si $\sum_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i) x_i^2 = 0$, donc si et seulement si $x_i = 0$ pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ (puisque une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul). Donc $\max_{U \in C} q_Y(U) = \lambda_1$, et cette valeur maximale est atteinte uniquement si le vecteur unitaire U vaut E_1 ou $-E_1$, le vecteur U_0 de l'énoncé (qui doit appartenir à C même si ce n'est pas précisé) est donc nécessairement un de ces deux vecteurs. Ensuite, $(\text{Vect}(U_0))^\perp$ est l'hyperplan $H = \text{Vect}(E_2, \dots, E_n)$, et un calcul analogue à celui qui précède montre que

$$\max_{U \in C'} q_Y(U) = \max_{U \in C \cap H} q_Y(U) = \lambda_2$$

et que cette valeur est atteinte en prenant $U = U_1 = \pm E_2$ (et seulement pour ces deux vecteurs).

Q38) Si A et B sont deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre deux, on a

$$V(A+B) = V(A) + 2\text{cov}(A, B) + V(B) \quad \text{et} \quad V(A-B) = V(A) - 2\text{cov}(A, B) + V(B)$$

$$\text{donc} \quad \text{cov}(A, B) = \frac{1}{4} (V(A+B) - V(A-B)) \quad (\text{identité de polarisation})$$

Comme U_0 et U_1 sont des vecteurs propres unitaires de Σ_Y associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 , et que ces deux vecteurs sont orthogonaux, on a $U_0^\top \Sigma_Y U_1 = U_1^\top \Sigma_Y U_0 = 0$, puis $U_0^\top \Sigma_Y U_0 = \lambda_1$, $U_1^\top \Sigma_Y U_1 = \lambda_2$, et finalement

$$\begin{aligned} \text{cov}(U_0^\top Y, U_1^\top Y) &= \frac{1}{4} (V((U_0 + U_1)^\top Y) - V((U_0 - U_1)^\top Y)) \\ &= \frac{1}{4} ((U_0 + U_1)^\top \Sigma_Y (U_0 + U_1) - (U_0 - U_1)^\top \Sigma_Y (U_0 - U_1)) \\ &= \frac{1}{4} ((\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

les variables $U_0^\top Y$ et $U_1^\top Y$ sont donc décorréliées.