

## Norme d'une matrice aléatoire

---

L'objectif de ce problème est d'étudier une inégalité de concentration pour la norme opérationnelle d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont mutuellement indépendants et « uniformément sous-gaussiens ».

Soit  $n$  un entier strictement positif. On identifie  $\mathbb{R}^n$  à l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  des vecteurs colonnes à  $n$  coordonnées réelles. Pour tout  $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  on note :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

La sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  est notée  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ . On identifie une matrice carrée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé et on note  $\sigma(M)$  l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

*Les parties A, B et C sont mutuellement indépendantes.*

### A. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 1) Montrer que  $S^{n-1}$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$  et en déduire l'existence de :

$$\|M\|_{\text{op}} = \max\{\|Mx\|; x \in S^{n-1}\}.$$

- 2) Montrer que l'application qui à  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  associe  $\|M\|_{\text{op}}$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer en outre que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on a l'inégalité  $\|Mx - My\| \leq \|M\|_{\text{op}} \|x - y\|$ .
- 3) Si  $M$  est symétrique, établir l'égalité  $\|M\|_{\text{op}} = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(M)\}$ . On pourra commencer par le cas où  $M$  est diagonale.

On note  $J_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- 4) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de  $J_n$  en précisant la dimension des espaces propres. En déduire la valeur de  $\|J_n\|_{\text{op}}$ .

Soit  $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 5) Démontrer l'inégalité  $\|M\|_{\text{op}} \geq \max\{|M_{i,j}|; 1 \leq i, j \leq n\}$ .
- 6) Etablir que :

$$\|M\|_{\text{op}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_{i,j})^2}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de  $M$  pour que cette inégalité soit une égalité.

On note  $\Sigma_n$  l'ensemble des matrices  $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $|M_{i,j}| \leq 1$  pour tous  $i, j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .

- 7) Montrer que pour tout  $M \in \Sigma_n$ ,  $\|M\|_{\text{op}} \leq n$ . Caractériser et dénombrer les matrices  $M$  de  $\Sigma_n$  pour lesquelles  $\|M\|_{\text{op}} = n$ .

## B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $\alpha > 0$ . On dit que la variable aléatoire  $X$  est  $\alpha$ -sous-gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation :  $\text{ch}(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$ .

- 8) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ . On pourra au préalable établir le développement de la fonction  $\text{ch}$  en série entière sur  $\mathbb{R}$ .
- 9) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Démontrer que si  $x \in [-1, 1]$ , on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t).$$

- 10) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que  $X$  est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si  $X$  est une variable aléatoire bornée par  $\alpha > 0$  et centrée, alors elle est  $\alpha$ -sous-gaussienne.
- 11) Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes et  $\alpha$ -sous-gaussiennes, et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des nombres réels tels que  $\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$ . Montrer que la variable aléatoire  $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$  est  $\alpha$ -sous-gaussienne.

- 12) Soit  $X$  une variable aléatoire  $\alpha$ -sous-gaussienne et  $\lambda > 0$ . Montrer que pour tout  $t > 0$  :

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est d'espérance finie si et seulement si la série  $\sum P(X \geq k)$  converge et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

- 13) Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , montrer que  $X$  est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général  $P(X \geq k)$  converge et que, dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

On pourra pour cela considérer la partie entière  $\lfloor X \rfloor$ .

Pour tout  $s \in ]1, +\infty[$ , on note  $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$ .

- 14) Soit  $X$  une variable aléatoire  $\alpha$ -sous-gaussienne et  $\beta > 0$ . Montrer que pour tout entier  $k > 0$  :

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\eta}$$

où on a posé  $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$ . En déduire que si  $\alpha\beta < 1$ , la variable aléatoire  $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$  est d'espérance finie majorée par  $1 + 2\zeta(\eta)$ .

En particulier, en prenant  $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et en utilisant l'inégalité  $1 + 2\zeta(2) \leq 5$  (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si  $X$  est une variable aléatoire  $\alpha$ -sous-gaussienne, on a l'*inégalité d'Orlicz* :

$$E\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leq 5.$$

### C. Recouvrements de la sphère

Si  $a \in \mathbb{R}^n$ , on note  $B_{a,r} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - a\| \leq r\}$  la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$ . Soit  $K$  une partie compacte non vide de  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $\varepsilon > 0$ .

- 15) Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble fini  $A$  de  $K$  tel que :

$$K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$$

On pourra raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

- 16) Soit  $\Lambda$  un sous-ensemble de  $K$  tel que pour tous  $x, y$  distincts dans  $\Lambda$ ,  $\|x - y\| > \varepsilon$ . Montrer que  $\Lambda$  est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble  $A$  du type considéré à la question précédente. Si de plus  $\Lambda$  est de cardinal maximal, montrer que :

$$K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$$

On admet l'existence d'une fonction  $\mu$ , appelée *volume*, définie sur l'ensemble des parties compactes de  $\mathbb{R}^n$  et vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) Pour tout vecteur  $a$  de  $\mathbb{R}^n$  et tout nombre réel  $r > 0$ ,  $\mu(B_{a,r}) = r^n$ .
- (ii) Pour toute famille finie  $K_1, \dots, K_m$  de compacts de  $\mathbb{R}^n$  deux à deux disjoints, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m K_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu(K_i).$$

- (iii) Pour tous compacts  $K, K'$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $K \subset K'$  implique  $\mu(K) \leq \mu(K')$ .

Soit  $\Lambda$  une partie finie de  $S^{n-1}$  telle que pour tous  $x, y$  distincts dans  $\Lambda$ ,  $\|x - y\| > \varepsilon$ .

- 17) Vérifier que les boules  $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$  pour  $a \in \Lambda$  sont toutes contenues dans  $B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$ .  
Montrer alors que le cardinal de  $\Lambda$  est majoré par  $\left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$ .
- 18) Justifier l'existence d'une partie finie  $\Lambda_n$  de  $S^{n-1}$ , de cardinal majoré par  $5^n$ , et telle que :

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \frac{1}{2}}$$

#### D. Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel  $\alpha > 0$  et on pose  $\gamma = \frac{1}{4\alpha^2}$ .

Soit  $n$  un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles  $M_{i,j}^{(n)}$ , indexées par  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , mutuellement indépendantes et  $\alpha$ -sous-gaussiennes. On note  $M^{(n)}$  la matrice aléatoire  $(M_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Si  $x \in S^{n-1}$ , on note  $y = M^{(n)}x$  qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes  $y_1, \dots, y_n$  sont des variables aléatoires réelles.

- 19) Montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la variable aléatoire  $y_i$  est  $\alpha$ -sous-gaussienne. En déduire que  $E(\exp(\gamma\|y\|^2)) \leq 5^n$  et que pour tout réel  $r > 0$  :

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5 e^{-\gamma r^2})^n.$$

- 20) Soit  $\Lambda_n$  une partie de  $S^{n-1}$  vérifiant les conditions de la question 18). Pour tout réel  $r > 0$ , montrer que  $\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geq 2r\sqrt{n}$  implique l'existence d'un  $a \in \Lambda_n$  tel que  $\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}$ . En déduire que :

$$P(\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geq 2r\sqrt{n}) \leq (25 e^{-\gamma r^2})^n.$$

FIN DU PROBLÈME