

1) Le temps caractéristique le plus évident car présent tout au long de l'enregistrement est $\tau_2 = 1 j$.

Il évidemment lié à la période de rotation de la Terre sur elle-même.

Il apparait également un phénomène de battements caractérisé par un temps plus long $\tau_3 = 14 j$

séparant deux dates pour lesquelles l'amplitude des variations est plus faible (pincements vers

57127 JJM et 57141 JJM). Il correspond à la moitié de la période synodique de la Lune, c'est-à-dire à

la moitié du temps mis par la Lune pour revenir à la même configuration Terre-Lune-Soleil. Ces deux dates

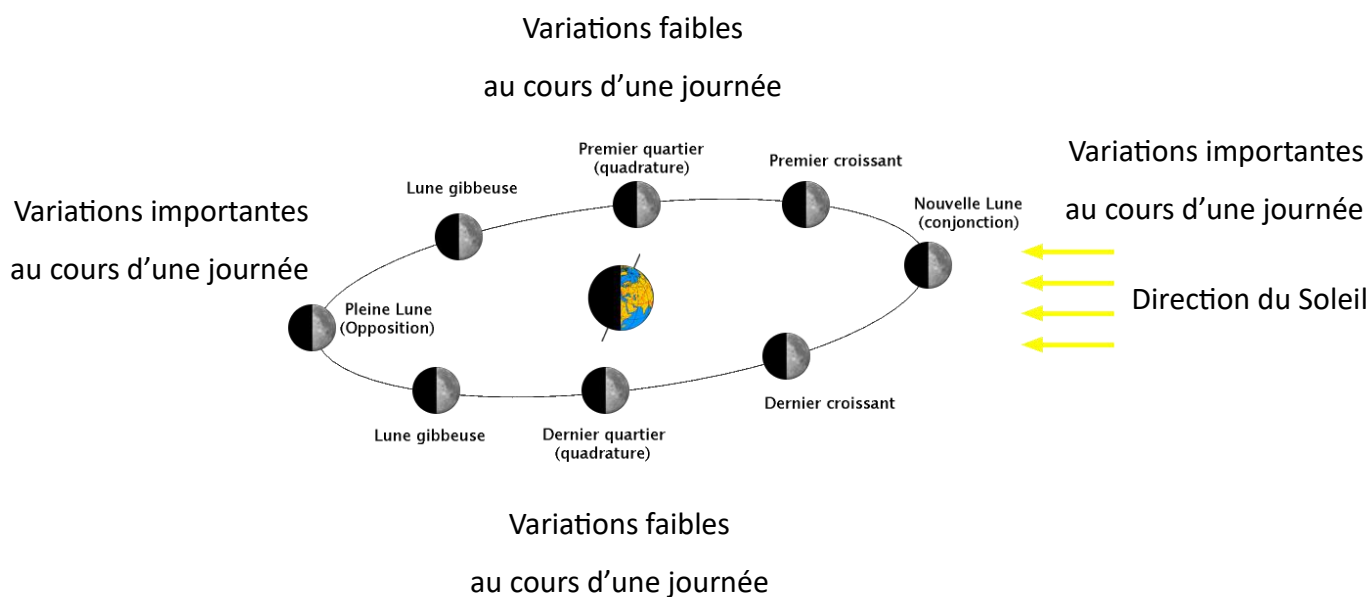
sont approximativement, des jours de premier et dernier quartier de Lune, lorsque la Lune et le Soleil

n'influent pas dans la même direction.

Enfin, on décèle un temps plus court $\tau_1 = \frac{1}{2} j$ qui témoigne des similitudes entre les dispositions à douze

heures d'intervalle (se reporter aux Q6 & Q9). Synonyme de deux marées par jour, ce temps caractéristique

se fait plus discret si l'on se trouve à haute latitude, près des pôles (se reporter à la Q11).



2) Dans un référentiel galiléen, **le principe de l'inertie est respecté** (ou 1^{ère} loi de Newton), à savoir qu'un point matériel isolé ou pseudo isolé a une trajectoire rectiligne uniforme ou est immobile.

Le référentiel de Copernic admet pour **point fixe le centre de masse du système solaire** et ses axes

sont dirigés vers **3 étoiles très éloignées**. Le référentiel géocentrique admet pour **point fixe le centre de masse de la Terre et est en translation** par rapport au référentiel de Copernic.

3) Sur l'échelle de temps des mesures, la Terre tourne autour du centre de masse du système solaire.

La translation de $\mathcal{R}_{géo}$ par rapport à \mathcal{R}_0 **n'est pas rectiligne uniforme**, $\mathcal{R}_{géo}$ n'est donc pas galiléen.

4) Le flux de \vec{G} à travers une surface fermée S_G est égal à $-4\pi G m_{int}$ avec m_{int} , la masse contenue dans S_G . D'après la symétrie sphérique de (A), la norme de \vec{G} ne dépend que de AM et tous les plans contenant \overline{AM} sont des plans de symétrie donc $\vec{G}(M)$ leur appartient : $\vec{G}(M) = \mathcal{G}(AM) \frac{\overline{AM}}{AM}$

$$\text{Ainsi, } 4\pi AM^2 \mathcal{G}_A(AM) = -4\pi G m_A \rightarrow \vec{\mathcal{G}}_A(M) = -\frac{Gm_A}{AM^3} \overline{AM}$$

$$5) T_M = 1 \text{ j} \quad T_L = 27 \text{ j} \quad T_S = 365 \text{ j} \quad \omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

On confondra dans ce problème jour solaire et jour sidéral (Voir Cours Mécanique en \mathcal{R}_{ng} – Page 18).

6) On applique la 2^{ème} loi de Newton à M dans $\mathcal{R}_{géo}$. Il subit les attractions gravitationnelles de la Terre et de (A), la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{\mathcal{R}_0}(T)$ et la résultante $\vec{R} = -m\vec{g}$.

$$\vec{a}_{\mathcal{R}_{géo}}(M) = \vec{\mathcal{G}}_A(M) + \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(T) - \vec{g}$$

D'après la 2^{ème} loi de Newton (T.R.C.) appliquée à la Terre dans \mathcal{R}_0 , on a $\vec{a}_{\mathcal{R}_0}(T) = \vec{\mathcal{G}}_A(T)$.

Enfin, le mouvement de M dans \mathcal{R}_g est une rotation uniforme d'accélération $\vec{a}_{\mathcal{R}_{géo}}(M) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{TM})$

$$\text{Ainsi, } \vec{g} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{TM}) + \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(T)}_{\vec{\gamma}_1}$$

Cette expression de $\vec{\gamma}_1$ est très importante. Elle montre que le phénomène étudié ici, à savoir la variation temporelle de g en un point M , n'est pas exclusivement due à $\vec{\mathcal{G}}_A(M)$ mais à la différence d'attraction entre celle en M et celle en T . C'est précisément pour cette raison que le temps τ_1 est susceptible d'apparaître.

7) Le terme $\vec{\gamma}_0$ est axifuge (fuyant l'axe (Tz)), **il diminue le champ de pesanteur**. Son influence est nulle aux pôles et maximale à l'équateur. Son impact sur g n'est pas temporel, il n'est que spatial (non uniforme).

8) Dans le référentiel terrestre lié à M , $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$ et $\vec{\gamma}_0$ sont constants donc disparaissent du calcul de $\delta\vec{g}$.

Au contraire, $\vec{\gamma}_1$ est variable. En assimilant \vec{u} à $-\vec{e}_r$ (ce qui n'est pas évident, voir Cours Mécanique en \mathcal{R}_{ng} – Page 17), on en déduit que $\delta g_A = -\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{e}_r - (\overline{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{e}_r})$

$$9) \vec{\gamma}_1 = -Gm_A \left(\frac{\overline{AM}}{AM^3} - \frac{\overline{AT}}{d_A^3} \right) = -\frac{Gm_A}{d_A^3} \left(\overline{TM} - 3 \frac{R_T}{d_A} \cos \Psi_A \overline{TA} \right) \rightarrow -\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{e}_r = \frac{Gm_A R_T}{d_A^3} (1 - 3 \cos^2 \Psi_A)$$

$$\text{Car } \overline{AM} = \overline{AT} + \overline{TM} \rightarrow AM^{-3} = (d_A^2 - 2d_A R_T \cos \Psi_A + R_T^2)^{-3/2} \rightarrow AM^{-3} \sim d_A^{-3} \left(1 + 3 \frac{R_T}{d_A} \cos \Psi_A \right)$$

$$\text{En définitive, } \delta g_A(\Psi_A) = \frac{3Gm_A R_T}{d_A^3} (\overline{\cos^2 \Psi_A} - \cos^2 \Psi_A) = \frac{3Gm_A R_T}{2d_A^3} (\overline{\cos(2\Psi_A)} - \cos(2\Psi_A))$$

La présence de $\cos(2\Psi_A)$ est en lien avec τ_1 .

Remarque : $\overline{\cos^2 \Psi_A} \neq \frac{1}{2}$ et $\overline{\cos(2\Psi_A)} \neq 0$ car Ψ_A ne parcourt pas forcément l'intervalle $[0, \pi]$ au cours d'une journée.

10) Nous nous intéressons au cas particulier où T, L, S et M sont coplanaires. Alors il est possible que \overline{TM} et \overline{TA} soient colinéaires ($\Psi_A^{min} = 0$). De plus, on a cette fois $\overline{\cos(2\Psi_A)} = 0$. $|\delta g_A(\Psi_A = 0)| = \frac{3Gm_A R_T}{2d_A^3}$

$$|\delta g_L((\Psi_A = 0))| = 8,6 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad |\delta g_S((\Psi_A = 0))| = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \kappa = 2,2$$

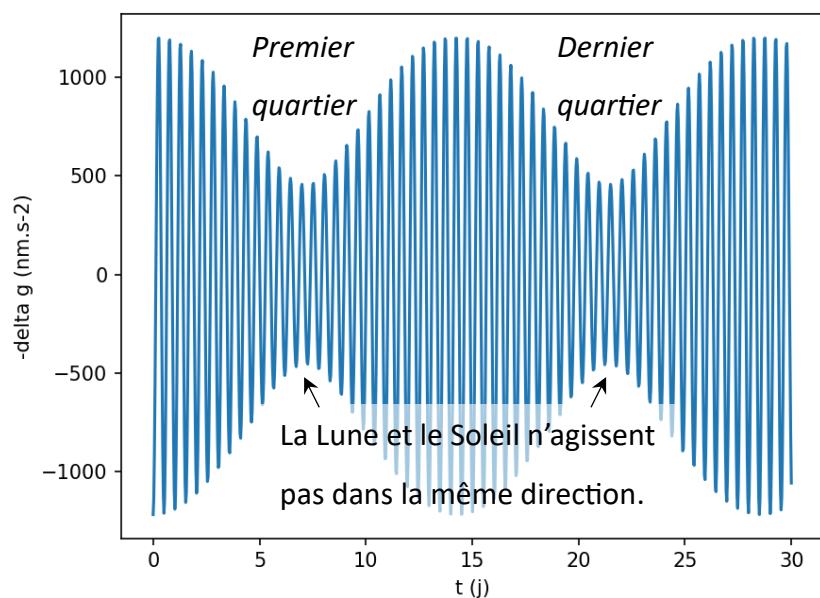
Ces perturbations à priori faibles ont pour conséquences les marées. Sur de grand volume, leur impact n'est pas du tout négligeable. Il en est de même lors d'expériences nécessitant une très grande précision (géodésie, accélérateurs de particules), leur prise en compte est alors inévitable.

L'influence de la Lune est deux fois plus importante que celle du Soleil.

11) $\delta g(t) = -\frac{3Gm_S R_T}{2d_S^3} (\cos(2\Psi_S(t)) + \kappa \cos(2\Psi_L(t)))$ Avec $\Psi_S(t) = \left(\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_S}\right)t \sim 2\pi t$ (t en j)

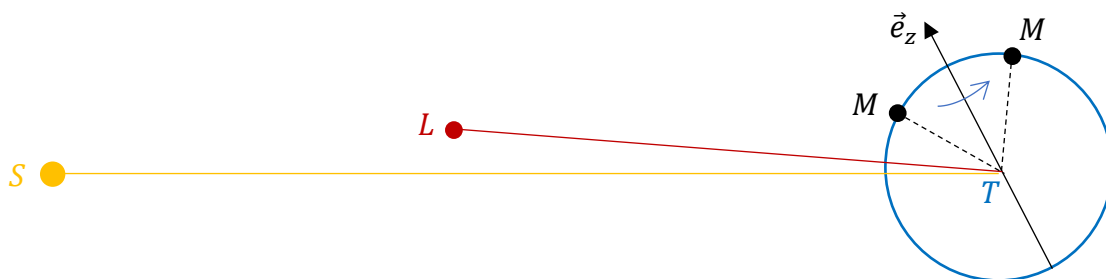
et $\Psi_L(t) = \left(\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_L}\right)t \sim 1,9\pi t$ (t en j) ($t = 0$ correspond à midi un jour de nouvelle Lune)

Numériquement, $\delta g(t) \sim -3,8 \cdot 10^2 (\cos(4\pi t) + 2,2 \cos(3,8\pi t))$ ($nm \cdot s^{-2}$)



On visualise la pseudo période $\tau_1 = \frac{1}{2} j$ et la période des battements $\tau_3 = 14 j$. L'amplitude des variations est cohérente.

Par contre, l'hypothèse simplificatrice de coplanéité de T, L, S et M ne permet pas de faire apparaître τ_2 . Si M s'éloignait du plan TLS (à peu près le plan de l'écliptique), l'angle Ψ_A pourrait alors ne pas dépasser $\frac{\pi}{2}$: $\cos(2\Psi_A)$ ne présenterait plus qu'un maximum et qu'un minimum par jour.



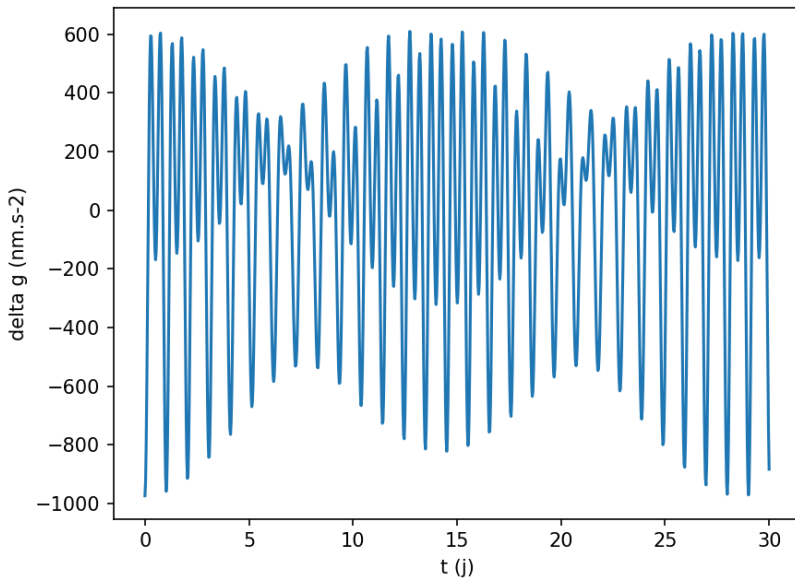
Développons ce dernier point : Soit λ_M la latitude de M et λ_A celle de l'astre A le temps des relevés.

$$\vec{TM} = R_T \left(\cos \lambda_M \left(\cos \left(\frac{2\pi t}{T_M} \right) \vec{e}_x + \sin \left(\frac{2\pi t}{T_M} \right) \vec{e}_y \right) + \sin \lambda_M \vec{e}_z \right)$$

$$\vec{TA} = d_A \left(\cos \lambda_A \left(\cos \left(\frac{2\pi t}{T_A} \right) \vec{e}_x + \sin \left(\frac{2\pi t}{T_A} \right) \vec{e}_y \right) + \sin \lambda_A \vec{e}_z \right) \quad \text{Or } \cos \Psi_A = \frac{\vec{TM} \cdot \vec{TA}}{R_T d_A}$$

$$\rightarrow \cos \Psi_A = \cos \lambda_M \cos \lambda_A \cos \left(\left(\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_A} \right) t \right) + \sin \lambda_M \sin \lambda_A$$

$$\cos^2 \Psi_A = \underbrace{\cos^2 \lambda_M \cos^2 \lambda_A \cos^2 \left(\left(\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_A} \right) t \right)}_{\text{Terme responsable du temps } \tau_1 \sim \frac{1}{2}j} + \underbrace{2 \sin \lambda_M \sin \lambda_A \cos \lambda_M \cos \lambda_A \cos \left(\left(\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_A} \right) t \right)}_{\text{Terme responsable du temps } \tau_2 \sim 1j} + (\sin \lambda_M \sin \lambda_A)^2$$



Voici une représentation de $\delta g(t)$ avec $\lambda_M = 0,8 \text{ rad}$ $\lambda_L = 0,2 \text{ rad}$ $\lambda_S = 0,1 \text{ rad}$ (Programme Python disponible en ligne).

Ce modèle un peu plus sophistiqué rend mieux compte de la disparition du temps caractéristique τ_2 . Les angles Ψ_L et Ψ_S parcourent à présent un intervalle réduit, dépassant à peine $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, le minimum de g entre deux annulations de $\cos \Psi_A$ est peu marqué. Et ceci d'autant plus que la Lune et le Soleil perturbent la pesanteur dans deux directions orthogonales, au premier et dernier quartier.

$$12) \quad p_\gamma = \frac{h}{\lambda_0} = 8,5 \cdot 10^{-28} \text{ J.s.m}^{-1} \quad p_0 = m\sqrt{\langle v_z^2 \rangle} = \sqrt{mk_B T_0} = 1,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

Ces deux valeurs sont comparables. Comme dans un choc, on comprend pourquoi les impulsions laser vont être capables de modifier les quantités de mouvement des atomes. Il a fallu toutefois descendre à $1 \mu\text{K}$!

13) On applique la 2^{ème} loi de Newton à chaque paquet d'ondes entre $t = 0$ et $t = \tau$:

$$p_1(t) = p_0 + mgt \quad \text{et} \quad p_2(t) = p_0 + p_\gamma + mgt \quad \rightarrow \quad d_{1a} = \frac{p_0 \tau}{m} + \frac{g\tau^2}{2} \quad \text{et} \quad d_{2a} = \frac{(p_0 + p_\gamma)\tau}{m} + \frac{g\tau^2}{2}$$

Numériquement, on obtient $d_{1a} \sim d_{2a} \sim 1,3 \text{ cm}$

14) On applique la 2^{ème} loi de Newton à chaque paquet d'ondes entre $t = \tau$ et $t = 2\tau$:

$$p_1(t) = p_0 + mg\tau + p_\gamma + mg(t - \tau) = p_0 + p_\gamma + mgt \text{ et } p_2(t) = p_0 + mg\tau + mg(t - \tau) = p_0 + mgt$$

$$\rightarrow d_{1b} = \frac{(p_0 + p_\gamma)\tau}{m} + \frac{3g\tau^2}{2} \text{ et } d_{2b} = \frac{p_0\tau}{m} + \frac{3g\tau^2}{2}$$

En effet, $d_{1a} + d_{1b} = d_{2a} + d_{2b} = \frac{(2p_0 + p_\gamma)\tau}{m} + 2g\tau^2 = z_0 \sim 5,0 \text{ cm}$ avec $z = 0$, les abscisses initiales.

15) $V(z) = -mgz \quad E = \frac{p^2(z)}{2m} - mgz$

16) On injecte la solution sous la forme proposée dans l'équation de Schrödinger et on sépare les variables.

$$\frac{i\hbar}{\zeta(t)} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{\phi(z)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dz^2} + V(z)\phi(z) \right) \text{ Cette égalité étant vérifiée pour tous } t \text{ et pour tous } z, \text{ chacun}$$

de ses membres est une constante C homogène à une énergie. On a $\frac{i\hbar}{\zeta(t)} \frac{d\zeta}{dt} = C \rightarrow \zeta(t) = \exp\left(\frac{iC}{\hbar}t\right)$

La solution $\zeta(t)$ ne devant tendre ni vers l'infini, ni vers 0, la constante $C \in \mathbb{R}$.

En résumé, C est une constante réelle homogène à une énergie dont le rapport $\frac{C}{\hbar}$ s'identifie à la pulsation ω de la fonction d'onde. D'après la relation de De Broglie, on peut affirmer que $C = -E$ (signe arbitraire).

17) On injecte la solution sous la forme proposée dans l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(z))\phi(z) = 0 \rightarrow \frac{i}{\hbar}\sigma'' - \frac{\sigma'^2}{\hbar^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(z)) = 0 \rightarrow \frac{\hbar}{i}\sigma'' + \sigma'^2 = 2m(E - V(z))$$

On aboutit à $\begin{cases} \sigma_0'^2 = \hbar^2 k^2(z) \\ \sigma_0'' + 2\sigma_0'\sigma_1' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_0' = \pm \hbar k(z) \\ \sigma_1' = -\frac{k'(z)}{2k(z)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_0(z) = \pm \hbar \int_0^z k(u)du \\ \sigma_1(z) = -\ln \sqrt{|k(z)|} \end{cases}$ A deux constantes près.

En définitive, $\phi_{\pm}(z) = \Phi_0 \exp\left(\pm i \int_0^z k(u)du - \ln \sqrt{|k(z)|}\right) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{|k(z)|}} \exp\left(\pm i \int_0^z k(u)du\right)$

Les paquets d'ondes se déplacent vers le bas, on retient $\phi(z) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{k(z)}} \exp\left(i \int_0^z k(u)du\right)$ avec $k(z) > 0$.

Si $V = V_0$, $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \rightarrow \phi(z) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{k}} \exp(ikz) \rightarrow \Psi(z, t) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{k}} \exp\left(\underbrace{i\left(kz - \frac{Et}{\hbar}\right)}_{i(kz - \omega t)}\right)$

On reconnaît une fonction d'onde du type **O.P.P.H.** (non normalisable) se propageant sans déformation.

18) $\lambda_{dB} = \frac{h}{p} \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{h}{\lambda_{dB}^2} \frac{d\lambda_{dB}}{dz}$ Or $2m(E - V(z)) = p^2(z) \rightarrow m \frac{dV}{dz} = -p \frac{dp}{dz} = \frac{hp}{\lambda_{dB}^2} \frac{d\lambda_{dB}}{dz} = \frac{p^3}{h} \frac{d\lambda_{dB}}{dz}$

Ainsi la condition légitimant l'approximation d'ordre 1 pour σ , $\left|\frac{m\hbar}{4p^3} \frac{dV}{dz}\right| \ll 1 \Leftrightarrow \left|\frac{d\lambda_{dB}}{dz}\right| \ll 8\pi$

19) D'après l'hypothèse \mathcal{A}_0 , $k_{1a} = \frac{p_0}{\hbar}$ $k_{2a} = \frac{p_0 + p_Y}{\hbar}$ $k_{1b} = \frac{p_0 + p_Y + mg\tau}{\hbar}$ $k_{2b} = \frac{p_0 + mg\tau}{\hbar}$

Puis $\varphi_a^0 = k_{2a}d_{2a} - k_{1a}d_{1a} = \frac{p_Y\tau}{\hbar m} \left(p_Y + 2p_0 + \frac{mg\tau}{2} \right)$

Et $\varphi_b^0 = k_{2b}d_{2b} - k_{1b}d_{1b} = -\frac{p_Y\tau}{\hbar m} \left(p_Y + 2p_0 + \frac{5mg\tau}{2} \right)$

Donc $\varphi^0 = -\frac{2p_Y g \tau^2}{\hbar} \sim -4,0 \cdot 10^5 \text{ rad} \rightarrow \mu = -\frac{4\pi\tau^2}{\lambda_0} = -4,0 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$

20) A l'instant $t = (2\tau)^+$, juste avant la mesure, les deux paquets d'ondes ont de nouveau la même impulsion $p_0 + 2mg\tau$, donc le même vecteur d'onde $k(z_0)$. On est face à la superposition classique de deux fonctions d'ondes de même amplitude $\frac{\Phi_0}{\sqrt{k(z_0)}}$ mais déphasées de φ , donnant naissance à des interférences quantiques régies par une expression analogue à celle de Fresnel en optique :

$$|\Psi|^2(\varphi) = (\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_1 + \Psi_2)^* = \frac{\Phi_0^2}{k(z_0)} (2 + 2 \cos \varphi) \rightarrow f(\varphi) = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$$

21) D'après la valeur de μ trouvée auparavant et en supposant qu'elle n'est entachée d'aucune incertitude, la précision minimale requise pour φ est $\delta\varphi = \left| \varphi \frac{\delta g}{g} \right| = |\mu \delta g| = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.

La variation du signal sera d'autant plus grande que $|\varphi|$ sera proche de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$...

On évite ainsi les plages de stationnarité de la fonction f , là où $|\varphi| = 0, \pi \dots$

22) $\varphi_a = \int_0^{d_{2a}} k_{2a}(z) dz - \int_0^{d_{1a}} k_{1a}(z) dz = \frac{1}{\hbar} \left(\int_0^{d_{2a}} p_{2a}(z) dz - \int_0^{d_{1a}} p_{1a}(z) dz \right)$

Or d'après la conservation de l'énergie, $\frac{p_{2a}^2(z)}{2m} = \frac{(p_0 + p_Y)^2}{2m} + mgz$ et $\frac{p_{1a}^2(z)}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} + mgz$

$$\varphi_a = \frac{1}{\hbar} \left(\int_0^{d_{2a}} \left((p_0 + p_Y)^2 + 2m^2gz \right)^{1/2} dz - \int_0^{d_{1a}} \left(p_0^2 + 2m^2gz \right)^{1/2} dz \right)$$

$$\varphi_a = \frac{1}{\frac{3m^2g\hbar}{K}} \left(\left((p_0 + p_Y)^2 + \frac{2m^2g}{v} d_{2a} \right)^{3/2} - (p_0 + p_Y)^3 - \left(\left(\frac{p_0^2 + \frac{2m^2g}{v} d_{1a}}{p_{1a}^2(d_{1a})} \right)^{3/2} - p_0^3 \right) \right)$$

23) $\frac{m^2gd_{1a}}{p_0^2} = \frac{mg\tau}{p_0} + \frac{m^2g^2\tau^2}{2p_0^2} = \frac{mg\tau}{p_0} \left(1 + \frac{mg\tau}{2p_0} \right) = 1,3 \cdot 10^3 \gg 1$

L'approximation \mathcal{A}_0 semble ne pas être légitime car d'après cette évaluation, $p_{1a}^2(d_{1a}) \gg p_0^2$ ce qui signifie que la valeur de k_1 n'est pas du tout constante durant l'étape \boxed{a} . D'après les réponses à la Q13, on pouvait déjà être surpris par cette initiative car $p_1(\tau) = p_0 + mg\tau = 7,2 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \sim 52 p_0$. Mais le diable se cache dans les détails ! En effet, φ_a diffère totalement de φ_a^0 mais il en est de même pour φ_b et φ_b^0 en inversant les rôles, de sorte que $\varphi_a - \varphi_a^0 = \varphi_b^0 - \varphi_b \rightarrow \varphi = \varphi^0$!

Une façon simple de démontrer cela est de calculer les déphasages par intégration dans le temps et non dans l'espace. Il est d'ailleurs étonnant que l'énoncé nous éloigne de cette technique ...

$$\varphi_a - \varphi_a^0 = \frac{1}{\hbar} \left(\int_0^\tau (p_{2a}(t) - p_0 - p_\gamma) dz_{2a} - \int_0^\tau (p_{1a}(t) - p_0) dz_{1a} \right)$$

Avec $p_{2a}(t) = p_0 + p_\gamma + mgt$ $z_{2a}(t) = \frac{(p_0 + p_\gamma)t}{m} + \frac{gt^2}{2}$ et $p_{1a}(t) = p_0 + mgt$ $z_{1a}(t) = \frac{p_0 t}{m} + \frac{gt^2}{2}$

$$\varphi_a - \varphi_a^0 = \frac{1}{\hbar} \left(\int_0^\tau gt(p_0 + p_\gamma + mgt) dt - \int_0^\tau gt(p_0 + mgt) dt \right) = \frac{gp_\gamma}{\hbar} \int_0^\tau t dt = \frac{gp_\gamma \tau^2}{2\hbar}$$

De même, $\varphi_b - \varphi_b^0 = \frac{1}{\hbar} \left(\int_\tau^{2\tau} (p_{2b}(t) - p_0 - mg\tau) dz_{2b} - \int_\tau^{2\tau} (p_{1b}(t) - p_0 - p_\gamma - mg\tau) dz_{1b} \right)$

Avec $p_{2b}(t) = p_0 + mg\tau + mg(t - \tau)$ $z_{2b}(t) = \frac{p_0 t}{m} + \frac{gt^2}{2} + \frac{p_\gamma \tau}{m}$

Et $p_{1b}(t) = p_0 + p_\gamma + mg\tau + mg(t - \tau)$ $z_{1b}(t) = \frac{(p_0 + p_\gamma)t}{m} + \frac{gt^2}{2} - \frac{p_\gamma \tau}{m}$

$$\varphi_b - \varphi_b^0 = \frac{1}{\hbar} \left(\int_\tau^{2\tau} g(t - \tau)(p_0 + mg\tau) dt - \int_\tau^{2\tau} g(t - \tau)(p_0 + p_\gamma + mg\tau) dt \right) = -\frac{gp_\gamma \tau^2}{2\hbar}$$

A défaut d'être légitime, l'approximation \mathcal{A}_0 simplifie les calculs et permet d'obtenir un résultat exact.