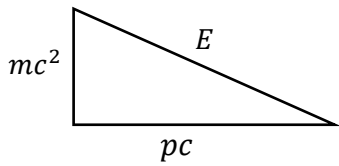


1-2) Le triangle relativiste est **rectangle**, son hypoténuse a pour longueur  $E$ .



Les unités de  $p$  et  $pc$  sont respectivement  $\mathbf{kg.m.s^{-1}}$  ( $N.s$ ) et  $\mathbf{J}$ .

$$E_0 = m_p c^2 = 940 \text{ MeV}$$

$$3) E_c = E_0 \left( \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \sim \frac{E_0 p^2}{2m^2 c^2} = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \vec{p} = m\vec{v} \quad \text{Car dans la limite classique, } E_c = \frac{mv^2}{2}.$$

$$\frac{E_c}{E_0} < 1\% \Leftrightarrow \frac{v^2}{2c^2} < 1\% \Leftrightarrow v < 4.10^7 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{Résultat indépendant de la nature de la particule.}$$

4-5)  $E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  L'énergie d'un photon étant finie,  $E_0 = 0 \rightarrow$  La masse d'un photon est **nulle**.

$$E = pc = \frac{hc}{\lambda} = h\nu \quad E_{bleu} = 3 \text{ eV} \quad E_{rouge} = 2 \text{ eV}$$

6) [Ici,  $E_f$  est l'énergie au repos finale de l'atome et non pas son énergie totale finale. Ainsi,  $\Delta E$  représente la variation d'énergie au repos et non la variation d'énergie totale, sinon il était évident que  $\Delta E = E$  !].

$$D'une part on a  $E_i = E_f + \frac{mv^2}{2} + E$  et d'autre part  $mv = \frac{E}{c} \rightarrow E^2 + 2mc^2 E - 2mc^2 \Delta E = 0$$$

$$\text{La solution positive de cette équation est } E = \sqrt{m^2 c^4 + 2mc^2 \Delta E} - mc^2 = mc^2 \left( \sqrt{1 + 2\Delta E/mc^2} - 1 \right)$$

$$7) \Delta E \ll mc^2 \sim m_p c^2 = 940 \text{ MeV} \rightarrow E \sim mc^2(1 + \Delta E/mc^2 - 1) = \Delta E$$

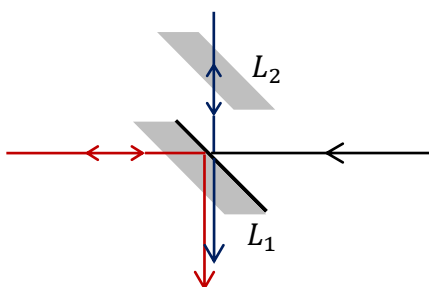
En effet, l'énergie du photon correspond à peu près à la variation d'énergie au repos de l'atome ( $\frac{mv^2}{2} \ll E_f$ )

$$8) \Delta E = H \left( \frac{1}{2n_f^2} - \frac{1}{2n_i^2} \right) \quad \text{Si } n_f = 1, \text{ alors } n_i \geq 2 \rightarrow E = \Delta E \geq \frac{3H}{8} \rightarrow \lambda \leq \frac{8hc}{3H} = \lambda_{max} = 0,12 \mu\text{m} \quad \text{U.V.}$$

$$\text{Si } n_f > 2, \text{ alors } E = \Delta E < \frac{H}{18} \rightarrow \lambda > \frac{18hc}{H} = \lambda_{min} = 0,82 \mu\text{m} \quad \text{I.R.}$$

Entre ces deux cas, les raies de Balmer dans le domaine visible correspondent à  $n_f = 2$ .

9) La couche semi-réfléchissante est située sur la face **en vis-à-vis de  $L_2$** .

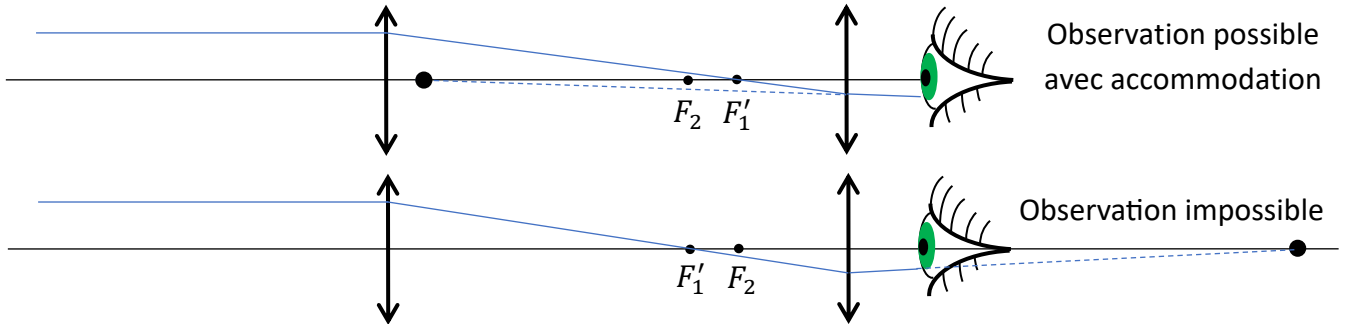


Sans la lame  $L_2$ , le rayon bleu traverserait une fois la lame  $L_1$  alors que le rayon rouge la traverserait trois fois.

Avec la lame  $L_2$  bien positionnée, chaque rayon traverse dorénavant trois fois l'une ou l'autre lame.

10) Les franges sont des **cercles concentriques**, on parle d'anneaux d'égale inclinaison (Voir Q12).

L'oculaire en question est une lunette, composée d'un objectif et d'un oculaire. En cas de mauvais réglage, l'image intermédiaire ne se forme pas dans le plan focal objet de l'oculaire, l'image définitive des anneaux n'est donc pas à l'infini. Soit l'image définitive est devant, alors l'observation est possible en accommodant, soit l'image définitive est derrière et dans ce cas, l'observation nette est impossible.



Les conclusions seraient les mêmes avec une lunette terrestre de Galilée.

11) Les ondes interférant au centre sont celles qui se propagent selon  $(O, \vec{e}_z)$ . La différence de marche  $\delta$  varie de  $2\Delta z$  lorsque le miroir est translaté de  $\Delta z$ . Or, entre deux franges sombres  $\Delta\delta = \lambda_0 \rightarrow \Delta N = \left\lfloor \frac{2\Delta z}{\lambda_0} \right\rfloor$ .

12) On met en exergue la lame d'air équivalente formée par  $\mathcal{M}_{mobile}$  et  $\mathcal{M}'_{fixe}$ , le symétrique de  $\mathcal{M}_{fixe}$ .

De façon évidente ici,  
 $\delta(\theta) = 2e \cos \theta$

Le fait que  $\delta$  ne dépende que de  $\theta$  justifie le nom et la forme des franges (Q10 !).

On peut également raisonner à partir de ce zoom ...

$$\delta = AB + BC - AH = 2AB - AH$$

$$= \frac{2e}{\cos \theta} - AC \sin \theta = \frac{2e}{\cos \theta} - 2e \tan \theta \sin \theta$$

$$= \frac{2e(1 - \sin^2 \theta)}{\cos \theta} = 2e \cos \theta$$

$\delta(\theta = 0) - \delta(\Delta\theta) = \lambda_0$

$$\rightarrow \Delta\theta = \arccos \left( 1 - \frac{\lambda_0}{2\Delta z_{max}} \right)$$

13)  $\Delta N = \left\lfloor \frac{2\Delta z}{\lambda_0} \right\rfloor \rightarrow \lambda_0 \sim 656 \text{ nm} \rightarrow$  Il s'agit de la raie  $H_\alpha$

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta(\Delta z)}{\Delta z}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\right)^2} \sim \frac{\Delta(\Delta z)}{\Delta z} = \mathbf{0,2 \%} \quad (\lambda_0 = 655,9 \pm 1,3 \text{ nm})$$

Grâce au grand nombre de franges qui ont défilé, la mesure est précise. Mais ceci aura une conséquence : en fin de décalage, les anneaux seront très proches les uns des autres. C'est l'objet de ce qui suit ...

Si  $\Delta z$  est le déplacement du miroir à partir du contact optique et si l'angle  $\Delta\theta$  demandé correspond à la situation en fin de défilement [deux notations malheureuses], alors

$$\Delta\theta = \arcsin\left(1 - \frac{\lambda_0}{2\Delta z}\right) \sim \sqrt{\frac{\lambda_0}{\Delta z}} = \mathbf{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ rad}} > 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \sim 1' \quad (\text{La résolution de l'œil})$$

L'utilisation d'un oculaire n'est pas obligatoire mais cela apportera plus de confort.

De toutes les façons, on espère que le décompte des 3156 franges n'est pas d'origine humaine ...

14)  $I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)\right) \quad C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \mathbf{1} \quad \text{Car ici } I_{min} = 0.$

Avec  $I_0$ , l'intensité de chacune des ondes qui interfèrent, après division de l'amplitude par le système interférentiel. Dans le cas de l'interféromètre de Michelson,  $I_0$  est le quart de l'intensité de la source.

15) Il y a **incohérence temporelle** entre les ondes de longueur d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , elles n'interfèrent pas entre elles, les intensités se somment :  $I(\delta) = 2I_1 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right)\right) + 2I_2 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right)\right)$

$$\rightarrow I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\pi\delta \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\right) \cos\left(2\pi\delta \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2\lambda_1\lambda_2}\right)\right)$$

Avec  $I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}$ , l'intensité des ondes susceptibles d'interférer, après division de l'amplitude.

$$\rightarrow I(\delta) \sim 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)\right) \quad C = \left|\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)\right|$$

$$\text{Car localement } I_{min} = 2I_0 \left(1 - \left|\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)\right|\right) \text{ et } I_{max} = 2I_0 \left(1 + \left|\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)\right|\right)$$

Au cours du déplacement du miroir, le **contraste s'annule régulièrement**. Entre deux brouillages successifs de la figure d'interférences, la différence de marche varie de  $\frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$ .

Ainsi, en observant le centre de la figure, entre deux brouillages successifs on a  $\Delta\delta = 2\Delta(\Delta z) = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$ .

Connaissant par ailleurs  $\lambda_0$  (mesure annexe), on peut en déduire  $\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$ .

De façon générale, le contraste est minimal si une frange sombre fournie par l'une des longueurs d'onde avoisine une frange brillante fournie par l'autre longueur d'onde, c'est-à-dire lorsque les déphasages  $\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}$  et  $\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}$  sont eux-mêmes en opposition de phase. On parle alors d'**anti coïncidence**. On a dans ce cas

$$\left| \frac{\delta}{\lambda_1} - \frac{\delta}{\lambda_2} \right| = \left( p + \frac{1}{2} \right) \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \text{ ce qui entraîne } I(\delta) = I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) + I_0 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) = 2I_0$$

Lorsque  $I_1 = I_2$ , on ne distingue plus de franges, l'intensité est uniforme, le brouillage est total.

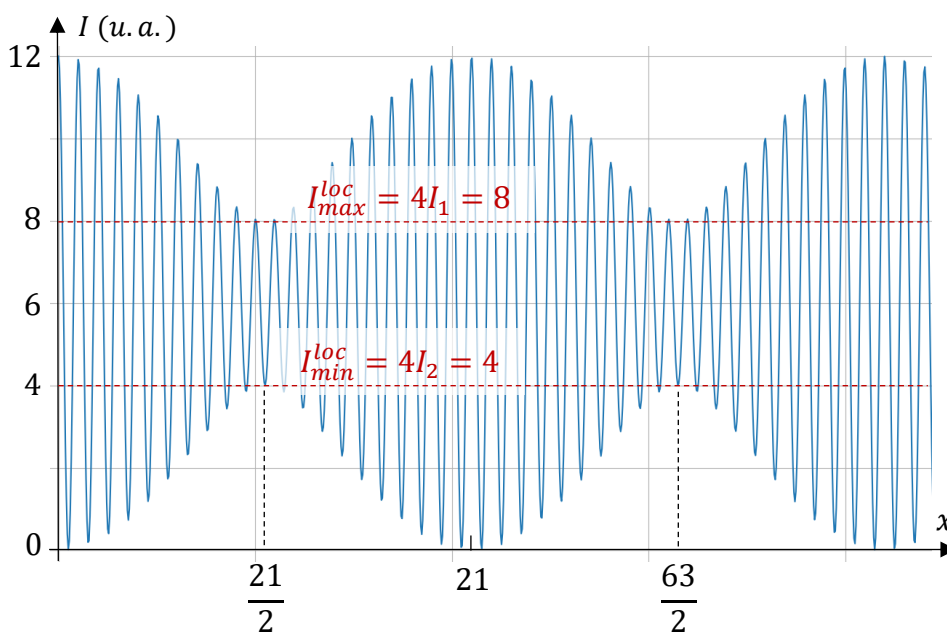
$$\text{Le contraste minimal est nul : } |\delta| = \left( p + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta\lambda} \sim \left( p + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \rightarrow \mathbf{C_{min} = \left| \cos \left( \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right| = 0}$$

**16)** Le contraste minimal impose toujours la relation  $\left| \frac{\delta}{\lambda_1} - \frac{\delta}{\lambda_2} \right| = \left( p + \frac{1}{2} \right)$  avec  $p \in \mathbb{N}$ . Mais à présent,

$$I(\delta) = 2I_1 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) + 2I_2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) \rightarrow \text{L'anti coïncidence n'entraîne plus de brouillage total.}$$

$$\text{Localement, on a } I_{min}^{loc} = 4I_2 \text{ et } I_{max}^{loc} = 4I_1 \rightarrow \mathbf{C_{min} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}}$$

Voici une illustration avec le tracé de la fonction  $I(x) = 4(1 + \cos(2\pi x)) + 2 \left( 1 + \cos \left( 2\pi x \frac{20}{21} \right) \right)$



On a dans ce cas,

$$I_1 = 2 \text{ et } I_2 = 1$$

Le contraste est minimal pour

$$x = \frac{21}{2} \text{ car alors}$$

$$2\pi x = 2\pi x \frac{20}{21} + \pi,$$

$$\text{pour } x = \frac{63}{2} \text{ car alors}$$

$$2\pi x = 2\pi x \frac{20}{21} + 3\pi \dots$$

En ces points,  $I_{min}^{loc}$  et  $I_{max}^{loc}$  sont bien égaux à  $4I_2$  et  $4I_1$ .

Le premier « brouillage » sera observé en  $\left| \frac{\delta}{\lambda_1} - \frac{\delta}{\lambda_2} \right| = \frac{1}{2} \rightarrow (\Delta z)_1 = \frac{\lambda_0^2}{4\Delta\lambda} = \mathbf{7,68 \text{ mm}}$ .

Avec un tel décalage, chaque système d'anneaux issu de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sera extrêmement concentré. Au-delà de l'anti coïncidence qui ne nous permettra plus de distinguer les franges, le rayon angulaire des premiers anneaux se rapprochera de la résolution de l'œil :  $(\Delta\theta)_1 = 9,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ . Il sera difficile de distinguer une situation de brouillage d'une situation de non brouillage car même si le contraste réaugmente au-delà de  $(\Delta z)_1$ , les anneaux susceptibles de réapparaître seront tellement petits et serrés que leur observation sera difficile.

17) La circulation d'eau permet de **refroidir** le tube AB ainsi que les supports des électrodes.

L'unité de la graduation en abscisse est l'**angström** ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ).

Le fond continu d'émission correspond au **rayonnement thermique moléculaire**, généré par l'agitation thermique de la matière (translation, rotation, vibration ...).

18) Le rayonnement d'émission de  $HO\bullet$  (radical avec électron célibataire) est discontinu, ce qui permet de mieux distinguer les raies du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène. De plus, son spectre est davantage situé dans l'ultra-violet ( $3000 \text{ \AA}$ ), cela permet aux raies de l'hydrogène de mieux s'exprimer.

19)  $\lambda_H = \lambda_\infty \frac{m_e + m_p}{m_p}$        $\lambda_D = \lambda_\infty \frac{m_e + 2m_p}{2m_p} < \lambda_H$       Le décalage est vers le **bleu**.

La résolution doit être inférieure à  $\lambda_H - \lambda_D = \lambda_\infty \frac{m_e}{2m_p} = \lambda_H \frac{m_e}{2(m_e + m_p)} = \mathbf{0,13 \text{ nm}}$

20) L'état est stationnaire car  $|\Psi|^2 = |\underline{\psi}_0|^2$  est **indépendant du temps** (il est même uniforme !).

Cette onde décrit une particule se déplaçant selon  $\vec{e}_x$  ( $x \nearrow$ ).       $v_\varphi = \frac{E}{p(E)}$        $v_g = \frac{1}{p'(E)}$

21) On injecte la solution proposée dans (4) et l'on constate le caractère **non relativiste** du modèle.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{ip(E)}{\hbar} \right)^2 \underline{\Psi}(x, t) + V \underline{\Psi}(x, t) = E \underline{\Psi}(x, t) \quad \forall(x, t)$$

$\rightarrow p(E) = \sqrt{2m(E - V)}$       C'est-à-dire  $\frac{p^2}{2m} = E - V = E_c$       et       $v_g(E) = \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}} = \frac{p(E)}{m}$

22) On injecte la forme de solution proposée dans (5) et l'on constate le caractère **relativiste** du modèle.

$$\hbar^2 c^2 \left( \frac{ip(E)}{\hbar} \right)^2 \underline{\Psi}(x, t) + (E - V)^2 \underline{\Psi}(x, t) = m^2 c^4 \underline{\Psi}(x, t) \quad \forall(x, t)$$

$\rightarrow (E - V)^2 = p^2(E)c^2 + m^2 c^4$       La particule n'étant plus libre, " $E - V$ " représente le reliquat d'énergie.

$\rightarrow p(E) = \frac{\sqrt{(E - V)^2 - m^2 c^4}}{c}$       Et       $v_g(E) = \frac{c^2 p(E)}{E - V} = \frac{c\sqrt{(E - V)^2 - m^2 c^4}}{E - V}$

**23)** Soit  $\underline{\Psi}(x, t) = \underline{\phi}(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$  En injectant cette forme dans l'équation de Schrödinger, on a

$$\frac{d^2 \underline{\phi}}{dx^2} - \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \underline{\phi}(x) = 0 \rightarrow \underline{\phi}(x) = \underline{A} \exp\left(-\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}} x\right) + \underline{B} \exp\left(\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}} x\right)$$

La fonction d'onde **pénètre la barrière mais sans se propager**, on parle d'**évanescence**.

Le potentiel étant fini,  $\underline{\phi}(x)$  et sa dérivée  $\underline{\phi}'(x)$  sont deux fonctions **continues** en  $x = 0$  et  $x = a$ .

Ces quatre relations permettent de calculer  $\underline{R}$  et  $\underline{T}$ .

**La probabilité que la particule traverse la barrière** est  $|\underline{T}|^2$ . Elle est non nulle alors que l'énergie de la barrière est supérieure à l'énergie de la particule. On reconnaît l'**effet tunnel** !

**24)** En injectant la même forme de solution dans l'équation de Klein-Gordon, on obtient

$$\hbar^2 c^2 \frac{d^2 \underline{\phi}}{dx^2} + (E - V)^2 \underline{\phi}(x) = m^2 c^4 \underline{\phi}(x) \rightarrow \frac{d^2 \underline{\phi}}{dx^2} + \frac{q^2}{\hbar^2} \underline{\phi}(x) = 0 \rightarrow \underline{\phi}(x) = \underline{\tilde{A}} \exp\left(-\frac{iqx}{\hbar}\right) + \underline{\tilde{B}} \exp\left(\frac{iqx}{\hbar}\right)$$

La fonction d'onde **pénètre la barrière tout en se propageant**.

Elle se réfléchit à chaque extrémité et donne naissance à des **interférences quantiques**.

On remarque que si  $\varepsilon^2 < m^2 c^4$  et à fortiori dans la limite classique  $\varepsilon^2 \ll m^2 c^4$ , il y a un changement de signe dans l'équation différentielle et on retrouve le comportement évanescent de la Q23.

$$\mathbf{25)} \quad |\underline{T}|^2 = (\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi)^{-1} = (1 + (\alpha^2 - 1) \sin^2 \varphi)^{-1}$$

Or  $\alpha \geq 1$  donc le maximum de  $|\underline{T}|^2$  est atteint pour  $\varphi = 0$  [ $\pi$ ] et vaut **1**.

On assiste alors à un phénomène de **résonance en transmission** accompagné de **la certitude de trouver la particule relativiste de l'autre côté de la barrière** !

[Restons prudent, les solutions de l'équation de Klein-Gordon sont très difficiles à interpréter dans le cadre de la mécanique quantique traditionnelle, elles nécessitent l'emploi de la théorie quantique des champs.

Notamment la notion d'antiparticule (d'énergie  $-E$  dans un puits  $-V$ ), chère à Dirac, est incontournable.

En effet, la relation du triangle d'Einstein accepte " $-E$ " puis " $-E + V$ " comme solution (Q22).

A ce sujet, avez-vous remarqué la *maladresse* concernant la définition de  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = V_0 - E$  ou  $\varepsilon = E - V_0$ ) ?

Est-ce volontaire ? On remarque que cela n'a aucune conséquence sur le traitement de la Q24 ...]