

1) A  $T_0 = 300 \text{ K}$  et  $P_0 = 1 \text{ bar}$ , le volume molaire  $\frac{RT_0}{P_0}$  vaut **25 L**.

Une mole de gaz contient  $\mathcal{N}_A$  molécules de volume  $\frac{4}{3}\pi R_m^3$ , ce qui représente un volume total de **2,5 mL**.

En conclusion, le rapport demandé est **0,01 %**

2) Un gaz parfait est constitué de molécules **sans interaction à distance**. Le rapport précédent indique clairement que l'éloignement moyen entre molécules justifie la non prise en compte de ces interactions.

3)  $\mathcal{E}_{cm} = \frac{1}{2} m_m v^2$      $\mathcal{E}_{pm} = m_m g z + cste$     Avec  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$

L'agitation thermique (chocs) a tendance à uniformiser la répartition des molécules dans le récipient.

Cela est d'autant vrai que  $k_B T \gg m_m g \Delta z \Leftrightarrow T \gg \frac{M g \Delta z}{R} \sim 0,1 \text{ K}$

4)  $\rho(z) = \frac{MP(z)}{RT_0} = \frac{m_m P(z)}{k_B T_0}$      $S(P(z) - P(z + dz)) - \rho(z) S dz g = 0 \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{m_m g}{k_B T_0} dz$

5)  $P(z) = P_0 A(z)$  Avec  $H = \frac{k_B T_0}{m_m g} \sim \mathbf{8 \text{ km}}$     La variation de pression **n'est pas détectable** sur quelques mètres. Par contre, dans l'eau liquide, la pression varierait de **0,1 bar** par mètre de profondeur.

6) La fonction  $\mathcal{E}(z) = m_m g z$  représente l'énergie potentielle de pesanteur d'une particule de ce gaz. La fonction  $A(z)$  se nomme facteur de Boltzmann. Il témoigne de la compétition entre le poids qui entraîne les particules vers le bas et l'agitation thermique qui tend à les répartir uniformément dans le volume. La probabilité pour une particule d'atteindre l'altitude  $z$  à  $dz$  près est proportionnelle à  $A(z) dz$ .

7) Appliquons la loi des gaz parfaits à la tranche située entre  $z$  et  $z + dz$  :

$$P(z) S dz = dN(z) RT_0 \rightarrow c_g(z) = \frac{dN(z)}{S dz} = \frac{P(z)}{RT_0} = \frac{P_0}{RT_0} A(z) = c_{g0} A(z)$$

8) Un grain est soumis à son poids  $m_b \vec{g}$  et aux deux forces exercées par l'eau, à savoir  $\vec{\Pi}$  et  $\vec{f}$ .

9) On applique la deuxième loi de Newton au grain dans le référentiel du laboratoire.

$$m_b \frac{d\vec{v}}{dt} = m_b \vec{g} + \vec{\Pi} + \vec{f} \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m_b} v = \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu_b}\right) g \rightarrow v(t) = \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) v_l$$

Avec  $\tau = \frac{m_b}{\alpha} \sim \mathbf{10^{-8} \text{ s}}$  et  $v_l = \frac{\mu_b - \mu_e}{\alpha} V_b g \sim \mathbf{10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$     La masse apparente  $m^* = (\mu_b - \mu_e) V_b$  correspond bien à la masse du grain privée de la masse d'eau déplacée.

10)  $[j] = L^{-2} \cdot T^{-1}$  L'unité de  $D$  est donc  $\mathbf{m^2 \cdot s^{-1}}$

$$\vec{j}_c + \vec{j}_n = \vec{0} \rightarrow \frac{dc}{dz} + \frac{v_l}{D} c = 0 \rightarrow c(z) = c_0 A(z) \quad \text{On identifie } H_b = \frac{D}{v_l} = \frac{\alpha D}{m^* g} = \frac{6\pi\eta R_b D}{m^* g}$$

$$\mathbf{11 \& 12) } \mathcal{E}_p^* = m^* g z \rightarrow H_b = \frac{k_B T_0}{m^* g} \rightarrow D = \frac{k_B T_0}{6\pi\eta R_b} \quad N = \int_0^\infty c(z) S dz \rightarrow c_0 = \frac{N}{S H_b}$$

$$\mathbf{13) } c(z) = \frac{n(z)}{S e} \rightarrow \ln[n(z)] = -\frac{z}{H_b} + \ln(S e c_0) \rightarrow H_b \sim \mathbf{4 \cdot 10^{-5} \text{ m}}$$

On n'a pas  $H_b \ll h_1$ , le calcul de  $c_0$  (Q 12) est remis en cause (est-ce grave ?).

14)  $k_B \sim \mathbf{9 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$  C'est un succès !

L'épaisseur  $e$  étant du même ordre de grandeur que  $R_b$ , l'observation et le décompte des grains sont à la source d'erreurs expérimentales. La maîtrise de l'incertitude sur  $e$  a nécessité l'emploi d'un très bon microscope et le décompte a été le fruit d'un travail particulièrement méticuleux.

15) On applique la deuxième loi de Newton au grain dans le référentiel du laboratoire :  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m_b} \vec{v} = \frac{\vec{F}_c}{m_b}$   
 En l'absence de  $\vec{F}_c$ , on retrouve le temps caractéristique  $\tau = \frac{m_b}{\alpha}$  très petit devant la durée d'observation.

16 & 17)  $x \frac{dv}{dt} = \frac{d(xv)}{dt} - v^2$   $u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  Or  $\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{1}{2} m_b u^2 = \frac{1}{2} k_B T_0 \rightarrow u = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m_b}}$

18) On projette ( $E_L$ ) sur l'axe  $Ox$  puis on multiplie par  $x$  :  $\frac{d(xv)}{dt} - v^2 + \frac{xv}{\tau} = \frac{x F_c}{m_b}$  On prend la valeur moyenne dans le temps de chacun des termes :  $\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\varphi}{\tau} = u^2 \rightarrow \varphi(t) = \frac{k_B T_0}{m_b} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$

19)  $\frac{d\psi}{dt} = \langle 2xv \rangle = 2\varphi(t) \rightarrow \psi(t) = \frac{2k_B T_0}{m_b} \left( t + \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau \right)$  ( $\psi(0) = 0$ )

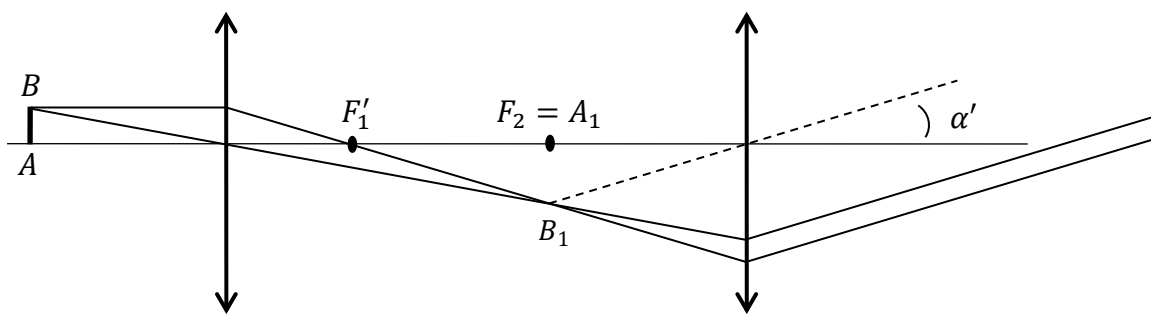
Très vite, le terme en exponentielle disparaît et finalement,  $\psi(t) \sim \frac{2k_B T_0}{m_b} t$

20) La pente de la droite d'ajustement vaut environ  $\frac{125}{80} \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \rightarrow k_B \sim 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

C'est un franc succès ! Si on se permet d'afficher un deuxième chiffre significatif, ce dernier résultat est encore plus impressionnant ( $1,2 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

21) Dans les conditions de Gauss, les rayons lumineux sont **très peu inclinés** par rapport à l'axe optique et **très peu éloignés** de l'axe optique. Ainsi, une lentille mince est un système vérifiant les propriétés de **stigmatisme** et d'**aplanétisme** (Un point a pour image un point et l'image d'un objet orthogonal à l'axe optique est elle aussi orthogonale à l'axe optique).

22 & 23) L'image intermédiaire est dans le **plan focal objet de l'oculaire**. La distance  $\Delta$  étant beaucoup plus grande que  $f'_1$ , l'objet  $AB$  est quasiment dans le plan focal de  $\mathcal{L}_1$  ( $\overline{F_1 A} \cdot \overline{F'_1 F_2} = -f_1'^2 \rightarrow \overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}$ )  
 Si  $\overline{AF_1} < 0$ , l'image intermédiaire serait **virtuelle** et **très éloignée** en amont du système.



Un œil sans défaut permet d'observer de façon nette et **sans accommoder**, une image située à l'infini.

24)  $\alpha' = \frac{A_1 B_1}{f'_2} = |\gamma_{obj}| \frac{AB}{f'_2} = \frac{\Delta AB}{f'_1 f'_2} \rightarrow P_i = \frac{\Delta}{f'_1 f'_2} = 7,5 \cdot 10^3 \delta$  pour un microscope usuel.

Un œil humain distingue deux points situés à l'infini si l'écart angulaire est supérieur à 1 minute d'angle, c'est-à-dire  $\frac{1}{60}$  de degré ou  $3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ .

Les grains seront observés si l'angle  $\alpha'$  sous lequel on voit  $AB$  à travers le microscope est supérieur à cette valeur :  $2R_b P_i > 3 \cdot 10^{-4} \rightarrow P_i > 7,5 \cdot 10^2 \delta$  Un microscope usuel est suffisant.