

1-3)  $\omega_0 = \frac{\mathcal{E}^* - \mathcal{E}_1}{\hbar}$      $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$     La distribution est **invariante par rotation** suivant  $\theta$  et  $\varphi$  : la norme du champ ne dépend que de  $r$ . Tous les plans contenant  $\overline{OM}$  sont des **plans de symétrie** pour la distribution donc des plans de symétrie pour le champ :  $\vec{E}(M)$  appartient à tous ces plans, il est donc dirigé suivant  $\vec{e}_r$ .

4-5) On choisit comme surface de Gauss la sphère centrée en  $O$  et de rayon  $r$  :  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = 4\pi r^2 E(r)$ .  
La charge intérieure est  $\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} \rightarrow \vec{F} = -\frac{\rho e \vec{r}}{3\epsilon_0}$  (Force de rappel)  $\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho e}{3m_e \epsilon_0}}$

6-7)  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0} \rightarrow \vec{r} = -\frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \vec{e}_z \rightarrow \vec{p} = e \overline{MO} = \frac{eV_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \vec{e}_z$

8)  $\omega_0 \sim 10^{16} \text{ rad.s}^{-1} \rightarrow \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \sim 10^{-7} \text{ m}$     Proche U.V.

9) Par conservation énergétique, le rayonnement s'accompagne d'une **diminution** de l'énergie mécanique.

10-11)  $\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2 \vec{p} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}(t) = \frac{eV_0}{\omega_0} \vec{e}_z e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(\omega_0 t)$      $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin^2(\omega_0 t)$

12)  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_e r_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( -\frac{1}{2\tau} \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right)^2 \sim \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos^2(\omega_0 t)$

13)  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2e^2} m_e \omega_0^2 p_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$  Amortissement de durée caractéristique  $\tau$ .

14) Il est question ici de la méthode d'Euler explicite. On note  $x_n = r(t_n)$ ,  $v_n = \frac{dr}{dt}(t_n)$  et  $a_n = \frac{d^2r}{dt^2}(t_n)$   
 $\rightarrow x_{n+1} = x_n + v_n T_e$  et  $v_{n+1} = v_n + a_n T_e$  avec  $T_e = h = \frac{T}{N} \ll \frac{2\pi}{\omega_0}$

Les dérivées sont assimilées à des taux de variation.

15)  $x_0 = 0$      $v_0 = 1$      $a_0 = -2 * 0.03 * 1 = -0.06$

Pour  $i = 0$ ,  $x_1 = 0 + 1 * 50 = \mathbf{50}$      $v_1 = 1 - 0.06 * 50 = -2$      $a_1 = a_0 = -0.06$

Pour  $i = 1$ ,  $x_2 = 50 - 2 * 50 = \mathbf{-50}$      $v_2 = -2 - 0.06 * 50 = -5$     ...

Pour  $i = 2$ ,  $x_3 = -50 - 5 * 50 = \mathbf{-300}$     ...    L'instruction "euler(3,0,1)" retourne [50, -50, -300].

[Il est étonnant de constater que le premier terme de la liste `tab_1` n'est pas la condition initiale mais 50. On peut éviter cela en décalant la boucle `for` à partir de  $i = 1$  :

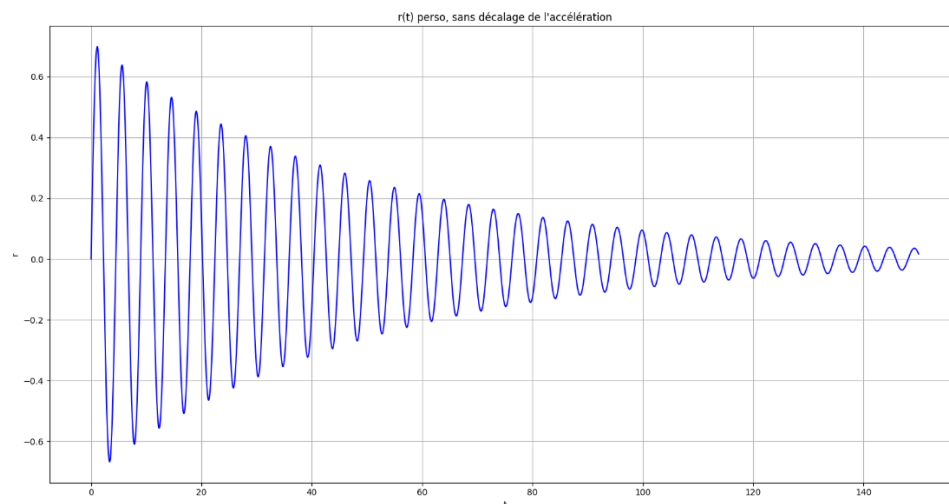
```
def euler(N, x0, v0):
    x=x0
    v=v0
    h=T/N
    a=-2*Lambda*v0-w0**2*x0
    tab_1=np.zeros(N)
    tab_1[0]=x0
    tab_2=np.zeros(N)
    tab_2[0]=v0
    for i in range(1,N):
        (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*Lambda*v-w0**2*x)
        tab_1[i]=x
        tab_2[i]=v
    return tab_1
```

Ceci n'est pas très important vu le grand nombre de points utilisés ( $N = 15\ 000$ ).

Mais demeure une autre bizarrerie. Le calcul de l'accélération au rang  $i$  s'appuie sur la position et la vitesse au rang  $i - 1$ . Il se crée ainsi un décalage à cause d'un bégaiement initial de  $a$ . Ceci se corrige ainsi :

```
def euler(N, x0, v0):
    x=x0
    v=v0
    h=T/N
    a=-2*Lambda*v0-w0**2*x0
    tab_1=np.zeros(N)
    tab_1[0]=x0
    tab_2=np.zeros(N)
    tab_2[0]=v0
    for i in range(1,N):
        (x,v)=(x+v*h,v+a*h)
        tab_1[i]=x
        tab_2[i]=v
        a=-2*Lambda*v-w0**2*x
    return tab_1
```

Voici le tracé de  $r(t)$  après correction. On remarque une grande différence de comportement (Voir Q18).



[L'amortissement est plus fort.]

16) Nous devons mettre en place **un compteur** :

```
i=0
while i<N:
    (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*Lambda*v-w0*w0*x)
    tab_1[i]=x
    tab_2[i]=v
    i+=1
return tab_1
```

[Dans les versions retouchées proposées précédemment, cela donne pour la première

```
def euler(N,x0,v0):
    x=x0
    v=v0
    h=T/N
    a=-2*Lambda*v-w0*w0*x
    tab_1=np.zeros(N)
    tab_1[0]=x0
    tab_2=np.zeros(N)
    tab_2[0]=v0
    i=1
    while i<N:
        (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*Lambda*v-w0*w0*x)
        tab_1[i]=x
        tab_2[i]=v
        i+=1
    return tab_1
```

(préservation de la condition initiale) et

```
def euler(N,x0,v0):
    x=x0
    v=v0
    h=T/N
    a=-2*Lambda*v0-w0*w0*x0
    tab_1=np.zeros(N)
    tab_1[0]=x0
    tab_2=np.zeros(N)
    tab_2[0]=v0
    i=1
    while i<N:
        (x,v)=(x+v*h,v+a*h)
        tab_1[i]=x
        tab_2[i]=v
        a=-2*Lambda*v-w0*w0*x
        i+=1
    return tab_1
```

(suppression du décalage concernant le calcul de l'accélération).]

17) L'oscillateur étant peu amorti ( $w_0^2 \gg \lambda^2$ ), on peut assimiler la pseudo période ( $\sim \frac{40}{19}$ ) à la période propre  $\frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{19\pi}{20} \rightarrow \text{omega} = 19 * \text{np.pi}/20$  Vraisemblablement, **omega = 3**

**18)** A première vue, la méthode semble satisfaisante car l'allure générale est respectée. Mais il est curieux de comparer deux courbes qui ne s'appuient pas sur le même paramètre  $\omega_0$  ... Le calcul du décrement logarithmique  $\delta$  va nous permettre de trancher :  $\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{r(t)}{r(t+nT^*)} \right) = \lambda T$  avec  $T$  la pseudo période.

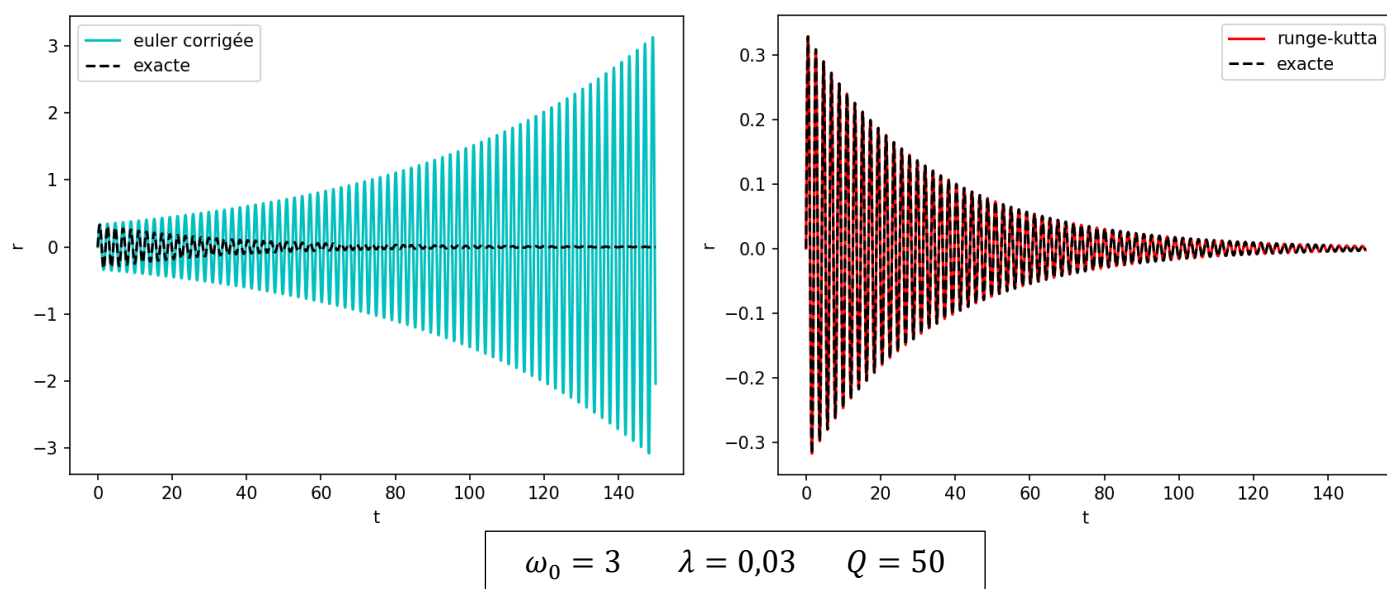
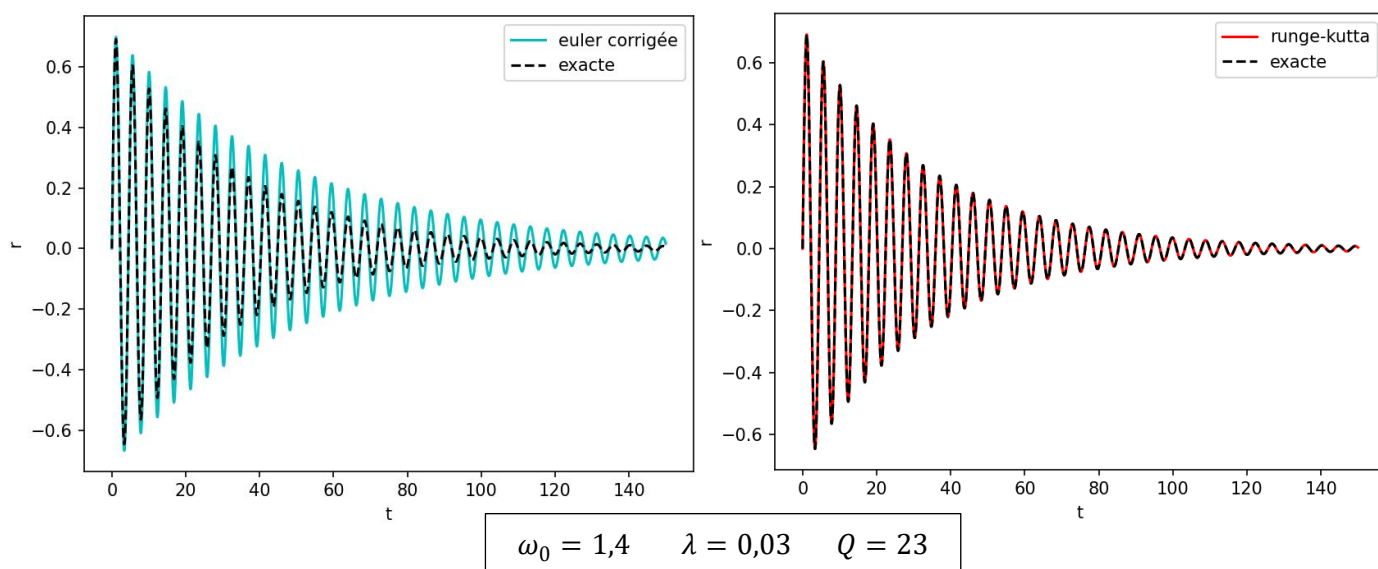
$$T_{\text{exacte}}^{\text{solution}} \sim \frac{40}{19} \quad \delta_{\text{exacte}}^{\text{solution}} \sim \frac{1}{12} \ln(2) \sim \frac{0,7}{12} \quad \rightarrow \lambda_{\text{exacte}}^{\text{solution}} \sim 0,03 \quad \text{Comme prévu !}$$

$$T_{\text{euler}}^{\text{méthode}} \sim \frac{40}{9} \quad \delta_{\text{euler}}^{\text{méthode}} \sim \frac{1}{16} \ln(2) \sim \frac{0,7}{16} \quad \rightarrow \lambda_{\text{euler}}^{\text{méthode}} \sim 0,01 \quad \text{Là, ça coince !}$$

La résolution numérique **n'est pas satisfaisante**, est-ce à cause de la méthode d'Euler elle-même ou plutôt à cause de l'erreur signalée précédemment concernant le calcul de l'accélération ? Si on analyse la courbe  $r(t)$  tracée plus haut dans ce corrigé (commentaires sur la Q15), on obtient

$$T_{\text{euler corrigée}}^{\text{méthode}} \sim \frac{40}{9} \quad \delta_{\text{euler corrigée}}^{\text{méthode}} \sim \frac{1}{8} \ln(2) \sim \frac{0,7}{8} \quad \rightarrow \lambda_{\text{euler corrigée}}^{\text{méthode}} \sim 0,02$$

C'est mieux mais encore insuffisant. En fait, **la méthode d'Euler montre ses limites** car le facteur de qualité  $Q = \omega_0/2\lambda$  est trop grand. Le comportement peut même devenir instable si  $Q$  devient beaucoup trop grand : il suffit de tester le programme avec la valeur  $\omega_0 = 3$  correspondant au tracé de la solution exacte pour s'en rendre compte. La méthode de Runge-Kutta est bien plus performante (programme en ligne).



**19)** L'approximation dipolaire stipule que  $a \ll r$ . On étudie le rayonnement de Rayleigh pour lequel l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.) est vérifiée au sein de la distribution :  $a \ll \lambda$ . On nie tout comportement ondulatoire à l'échelle du dipôle. Ceci s'interprète également en termes cinématiques avec  $T$ , la période :  $\frac{a}{T} \ll \frac{\lambda}{T} \Leftrightarrow v \ll c \rightarrow$  L'électron est non relativiste.

De plus, on se place dans la zone de rayonnement, c'est-à-dire  $\lambda \ll r$ . Cela signifie que le temps de propagation  $\frac{r}{c}$  est très grand devant la période du signal  $\frac{\lambda}{c}$ . On s'intéresse à la propagation de l'onde électromagnétique dans l'espace. Hors distribution, le positionnement est tout à fait contraire à l'A.R.Q.S.

**20)** Le plan  $(xy)$ , en d'autres termes le plan  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , est un plan d'antisymétrie pour la distribution donc le champ électrique sur ce plan est suivant  $\vec{e}_\theta$ .

Les plans méridiens, en d'autres termes les plans  $\varphi = cste$ , sont des plans de symétrie pour la distribution donc le champ magnétique sur ces plans est suivant  $\vec{e}_\varphi$ .

Enfin, le champ électrique a la même dimension que le produit du champ magnétique avec une vitesse.

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta \dot{p}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} \vec{e}_\theta \quad \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta \dot{p}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r c} \vec{e}_\varphi$$

$$\mathbf{21-23) \quad \vec{\Pi} = \frac{\mu_0 p_m^2 \omega_0^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c r^2} \sin^2 \left[ \omega_0 \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{e}_r \rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 p_m^2 \omega_0^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c r^2} \vec{e}_r$$

$$\rightarrow \Phi_{ray} = \frac{\mu_0 p_m^2 \omega_0^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad \Phi_{ray} = \frac{p_m^2 \omega_0^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \underbrace{\frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3}}_\gamma \mathcal{E}_m(t=0)$$

L'amortissement étant faible ( $\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$ ), sur le long terme, on peut supposer que  $\Phi_{ray}(t) = \gamma \mathcal{E}_m(t)$ .

$$\mathbf{24) \quad \mathcal{E}_{ray} = \hbar \omega_0 \sim \Phi_{ray} \tau_c \rightarrow \tau_c \sim \frac{6\hbar \epsilon_0 c^3}{p_m^2 \omega_0^3} \sim \frac{6\hbar \epsilon_0 c^3}{e^2 a^2 \omega_0^3} \sim \mathbf{1 \text{ ns}} \quad (\text{Entre un laser et une lampe spectrale})$$

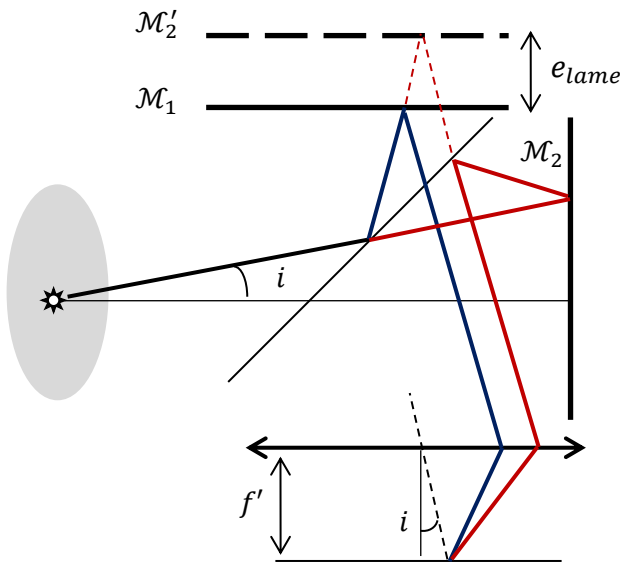
$$\mathbf{25-26) \quad \delta \mathcal{E}_m = -\Phi_{ray} \delta t = -\gamma \mathcal{E}_m \delta t \quad \text{En passant à la limite, } \frac{d \mathcal{E}_m}{dt} + \gamma \mathcal{E}_m = 0$$

A partir de maintenant,  $\omega_0 \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  car la raie est dans le visible :  $\tau = \frac{1}{\gamma} \sim \mathbf{2 \cdot 10^{-8} \text{ s}} \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\mathbf{27) \quad \tau_c \sim 5\tau \sim \mathbf{10^{-7} \text{ s}} \rightarrow \Delta \nu_{naturelle} = \frac{1}{\tau_c} \sim \mathbf{10^7 \text{ Hz}}$$

Ce n'est que la largeur spectrale naturelle (Voir la fin du sujet).

28-29) Le miroir  $\mathcal{M}_1$  et le symétrique de  $\mathcal{M}_2$  par rapport à  $S_p$  forme une lame d'air équivalente.



$$\delta = 2e_{lame} \cos i \quad \text{Voir cours !}$$

[Pour le calcul de la différence de marche, vous devez connaître parfaitement les deux techniques de calcul présentées page 20 du cours "Interférences lumineuses à deux ondes". Si vous avez le choix, privilégiez la méthode avec  $S'_1$  et  $S'_2$ , tout en haut, hors figure ici !]

$$I(i) = \frac{I_{max}}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta(i)}{\lambda_0} \right) \right)$$

On observe des **cercles concentriques** car l'intensité ne dépend que de l'angle  $i$ .

30) Deux radiations de fréquences  $\nu$  et  $\nu'$  **différentes ne peuvent interférer**. L'intensité résultant de cette superposition est la **somme des intensités**  $I(\nu)$  et  $I(\nu')$ . Si au voisinage d'un même angle  $i$ , l'une est **maximale** et l'autre **minimale**, les franges disparaissent.

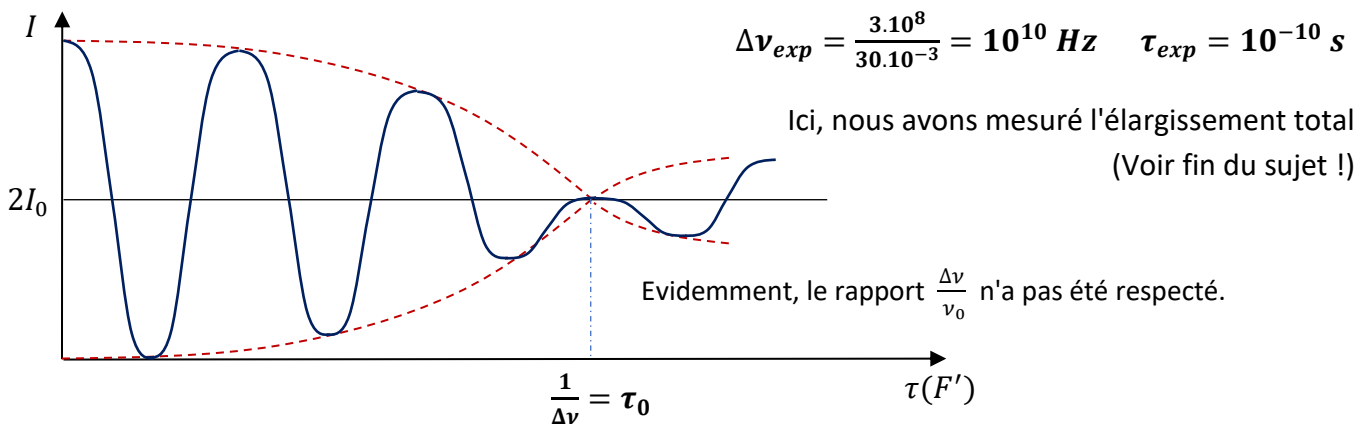
$$\Delta p = \delta \Delta \left( \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\delta \Delta \nu}{2c} = \frac{e_{lame} \Delta \nu}{c} \quad \text{en } F'$$

31) Il y a brouillage si le décalage d'ordre vaut  $\frac{1}{2}$  (maximum-minimum !) donc  $e_{lim} = \frac{c}{2\Delta\nu}$

32)  $dI(F') = 2 \frac{I_{\nu(\nu)}}{4} d\nu [1 + \cos(2\pi\nu\tau(F'))]$   $\tau(F')$  est le **retard temporel**  $p(F') = \nu\tau(F')$

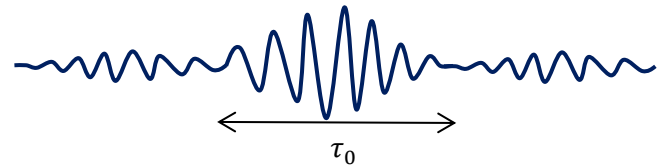
33-35) On somme les  $dI$  (incohérence) :  $I(F') = \frac{I_0}{2} + \frac{I_{\nu m}}{2} \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} \cos(2\pi\nu\tau(F')) d\nu$  **Erreur d'énoncé**  
 $= \frac{I_0}{2} + \frac{I_{\nu m}}{4\pi\tau(F')} [\sin(2\pi\nu\tau(F'))]_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} = \frac{I_0}{2} [1 + \text{sinc}(\pi\Delta\nu\tau(F')) \cos(2\pi\nu_0\tau(F'))]$

[Cette partie correspond à l'exercice 3.3 du TD "Optique ondulatoire"]



Si l'écart temporel atteint la durée d'un train d'onde, la **superposition n'est plus possible** : incohérence !

Attention ! Dans ce modèle à profil rectangulaire,  $\tau_0$  n'est que la durée de la partie centrale du train d'onde, c'est pour cela que les franges réapparaissent légèrement au-delà !



36-38)  $t_1 = \frac{d}{c}$  Le deuxième maximum est émis en  $t = T_0 \rightarrow t_2 = T_0 + \frac{d - v_x T_0}{c}$

Ainsi,  $v = \frac{1}{t_2 - t_1} = \frac{v_0}{1 - v_x/c} \sim v_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$

39) Le spectre énergétique est **discret** (états liés) car les atomes sont confinés.  $m^* \sim 3 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$

40 & 41)  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2} \mathcal{E} \varphi(x) = 0 \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \rightarrow \varphi(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} \mathcal{E}_n} x\right)$  et  $\mathcal{E}_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m^* L^2}$   
 $\mathcal{E}_1 = 10^{-41} \text{ J}$

42)  $n_1 \sim 10^{10} \rightarrow \frac{\mathcal{E}_{n_1+1} - \mathcal{E}_{n_1}}{\mathcal{E}_{n_1}} = \left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^2 - 1 \sim \frac{2}{n_1} \sim 10^{-10}$  Le caractère discret n'est plus détectable.

43-46)  $n(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_1}} \rightarrow dn = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{E}_1}} d\mathcal{E} \quad \mathcal{P}(\mathcal{E}) \propto \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right) \rightarrow f(\mathcal{E}) \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right)$

47) La somme des probabilités élémentaires est égale à 1.  $f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\pi k_B T_{gaz}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T_{gaz}}\right)$

48)  $\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathcal{E}_c \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m^* v_x^2 \right\rangle = \int_0^\infty \mathcal{E} f(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{2} k_B T_{gaz}$

**Théorème d'équipartition** de l'énergie en mécanique classique

Si l'énergie contient plusieurs termes **quadratiques**, la valeur moyenne de chaque terme est identique.

Chaque degré de liberté à énergie quadratique contribue à l'énergie moyenne à hauteur de  $\frac{k_B T}{2}$ .

[Attention ! Ne pas confondre cette équipartition énergétique avec celle de population lorsque  $T \gg T_{gel}$ .]

$$u = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T_{gaz}}{m^*}} \sim 2 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

49)  $v_+ = \frac{v_0}{1 - u/c} \quad v_- = \frac{v_0}{1 + u/c} \quad \Delta v_{DOP} = 2v_0 \frac{u}{c} \sim 10^{10} \text{ Hz} \sim \Delta v_{exp} \gg \Delta v_{naturelle}$

En effet, l'élargissement Doppler est beaucoup plus influent que l'élargissement naturel.