

## Borel Cantelli 2 suite planche P1

**Exercice 1** (Borel-Cantelli 2). a) (Version plus facile) Soit  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements indépendants tels que  $\sum \mathbb{P}(A_i)$  soit divergente.

Montrer que  $\mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = 1$

b) Une application « concrète » : Soit une urne contenant au départ deux boules, une noire. On effectue une suite de tirages avec remise et à chaque tirage on rajoute en plus une boule rouge dans l'urne. Au  $n$ -ème tirage l'urne contient donc  $n$  boules rouges et une boule noire. Quelle est la probabilité que si on joue pendant un temps infini, on obtient au moins une fois la boule noire ?

c) Amélioration : Borel-Cantelli 2 : Avec les hypothèses du a), montrer mieux, que l'événement  $B$  « les événements  $A_n$  sont réalisés pour une infinité de valeur de  $n$  », est encore de probabilité 1.

d) Que dit le résultat du c) sur l'exemple du b) ?

## Révisions sur les lois usuelles de première année

**Exercice 2** (Savoir reconnaître des lois). Pour chaque question, reconnaître la loi de  $X$  et en préciser les paramètres :

- On lance un dé équilibré et on note  $X$  la valeur obtenue
- Une urne contient 12 boules : 6 vertes, 4 rouges, 2 noires. On tire successivement et avec remise 8 boules et on note  $X$  la v.a. égale au nombre de boules rouges obtenues.
- on range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note  $X$  le nombre de boules mises dans le premier sac.
- une urne contient  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ) : on les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1. On note  $X$  le nombre de tirages effectués.
- On pose  $n$  questions à un élève. Pour chaque question,  $r$  réponses sont proposées et une seule est correcte. L'élève répond au hasard à chaque question et on note  $X$  le nombre de bonnes réponses.

**Exercice 3** (Loi du maximum de  $n$  v.a. de loi uniforme : la méthode pour les max et le min...). Un correcteur paresseux met « au hasard » une note entre 0 et 20 à chacune de ses  $n$  copies. On note  $X_n$  la v.a. qui donne la valeur de la note maximale. Déterminer la loi de  $X_n$  puis déterminer la limite de cette loi pour  $n \rightarrow +\infty$  autrement dit pour chaque  $k \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ .

indication (méthode pour les max./min) commencer par étudier  $\mathbb{P}(X_n \leq k)$ .

## Cadre « infini » en deuxième année

**Exercice 4** (Généralités sur les v.a.d.). Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n)$  une suite de v.a.d. de  $\Omega$  dans un ensemble  $E$ .

a) **Temps d'arrêt** : On fixe  $x \in E$  et on considère  $T_x : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $\omega \mapsto \min\{n \in \mathbb{N}, X_n(\omega) = x\}$ . Montrer que  $T_x$  est une v.a.d. qu'on notera simplement  $T_x = \min\{n \in \mathbb{N}, X_n = x\}$ .

b) **Une sorte de « Composition »** Soit  $N$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On définit  $X_N$  par  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $X_N(\omega) := X_{N(\omega)}(\omega)$ . Montrer que  $X_N$  est une v.a.d.

**Exercice 5.** Une urne contient initialement une boule blanche. On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

- si on obtient pile : on ajoute une boule noire et on lance à nouveau la pièce,
- si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

On note  $X$  le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.

- Déterminer la loi de  $X$ .
- Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience ?

**Exercice 6.** Un joueur jette une pièce a priori non équilibrée (qui tombe sur pile avec une proba.  $p$ ) jusqu'à ce qu'il obtienne « pile ». Si ceci se passe au  $k$ -ième lancer, il lance alors  $k$  fois un dé équilibré. Il gagne s'il obtient *exactement* une fois un 6. On demande la probabilité pour que le joueur gagne à ce jeu.

**Exercice 7** (Loi binomiale négative : Obtention « naturelle » de cette loi). La loi binomiale permet de décrire le nombre de succès qu'on peut obtenir lors d'une série de  $n$  expériences de Bernoulli indép. de même paramètre  $p$ . On peut considérer le problème inverse, c'est-à-dire essayer de décrire le nombre d'expériences qu'il faut faire pour arriver à obtenir  $k$  succès où  $k$  est donné.

Clairement si  $k = 0$  ce nombre est 0 Si  $k = 1$ , on cherche en fait l'instant  $T_1$  du premier succès, et on sait que ce temps  $T_1$  suit une loi géométrique. On s'intéresse ici au cas  $k \geq 1$ .

On fixe un  $k \geq 1$  on appelle  $T_k$  la v.a. qui donne le temps d'attente du  $k$ -ième succès.

Déterminer la loi de  $T_k$ .

**Exercice 8.** Soient  $X$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$  deux v.a. telles que  $X \leq Y$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(Y = n) \neq 0$ .  
On suppose que la loi conditionnelle de  $X$  par rapport à  $Y = n$  est la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

- Montrer que les v.a.  $Y - X + 1$  et  $X$  ont même loi.
- On suppose dans cette question seulement que  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ .
  - Déduire de la formule  $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(Y = n)}{n}$  une expression de  $\mathbb{P}(Y = k)$  en fonction de  $\mathbb{P}(X = k)$  et de  $\mathbb{P}(X = k + 1)$  pour tout  $k$ . En déduire la loi de  $Y$ .
  - Montrer que les v.a.  $Y - X + 1$  et  $X$  sont indépendantes.

**Exercice 9.** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de loi conjointe définie par  $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$ ,  $P(X = k, Y = l) = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^{k+l}}{k!l!}$ .

Démontrer que  $X$  et  $Y$  suivent chacune une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et sont indépendantes.

## Espérance

**Exercice 10.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $n$  personnes montent dans un ascenseur d'un immeuble de  $p$  étages et que chaque personne a autant de chance de descendre à chaque étage. On note  $X$  le nombre d'arrêts de l'ascenseur. Déterminer  $\mathbb{E}(X)$ .

**Exercice 11.** Soient  $m$  et  $n$  deux entiers non nuls tels que  $m \leq n$ .

- Dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à  $n$ , on tire sans remise  $m$  boules et on note  $X$  le plus petit numéro obtenu. Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .
- Même question pour un tirage avec remise (on note  $Y$  la v.a. correspondante).
- Comparer les deux résultats pour  $m$  fixé et  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 12.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . On considère une v.a.  $X$  binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Exprimer  $E(\frac{1}{X+1})$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

**Exercice 13** (Espérance conditionnelle). Soit  $X$  une variable aléatoire discrète réelle sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . Pour un événement  $A \in \mathcal{A}$  de probabilité non nulle, si la famille  $(x\mathbf{P}(X = x | A))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable, on appelle espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $A$  :

$$\mathbf{E}(X | A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x | A)$$

- On suppose que  $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . Montrer qu'alors  $\mathbf{E}(X | A)$  est bien définie si  $\mathbf{P}(A) \neq 0$ .
- Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un système quasi-complet d'événements. Montrer :  $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) \mathbf{E}(X | A_k)$ .
- On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p_1, p_2$  dans  $[0, 1]$ .  
On considère deux v.a.  $X$  et  $Y$  telles que  $X \sim \mathcal{B}(n, p_1)$  et que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = k$  est  $\mathcal{B}(k, p_2)$ . Déterminer  $E(Y)$ .

**Exercice 14.** Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi à valeurs dans  $\mathbb{R}^{++}$ . Montrer que  $E(X/Y) \geq 1$ .

## Matrices aléatoires

**Exercice 15.** Soient  $X, Y, Z$  des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On considère  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $M = \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{bmatrix}$ .

- Calculer la probabilité que  $M$  soit inversible.
- Calculer  $J^2$  (et, en fait oralement,  $J^3$ ).  $J$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ? Sur  $\mathbb{R}$ ?
- Quelle est la probabilité que  $M$  soit diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ?
- Quelle est la probabilité que  $M$  soit diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ ?