Révisions de première année (éventuellement généralisées à notre nouveau cadre)

Exercice 1. Trois chasseurs numérotés de 1 à 3 sont d'adresses différentes : le premier touche le gibier 7 fois sur 10, le second 5 sur 10, le troisième 1 fois sur dix.

Les trois chasseurs tirent simultanément sur un lapin (pauvre lapin).

Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) Le lapin est touché.
b) Le lapin est touché mais le chasseur 3 l'a raté.
c) Le chasseur 3 est le seul à avoir touché le lapin.
d) Le lapin est touché sachant que le chasseur 3 l'a raté.

Exercice 2. Un système parallèle constitué de n composants indépendants fonctionne si et seulement si l'un au moins des composants fonctionne. La probabilité de fonctionnement du $k^{\text{ème}}$ composant est notée p_k. Quelle est la probabilité de fonctionnement du système ?

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, B, C, D dans $\mathcal{A}$.

a) Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geqslant 1 - \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(C^c).$$

b) Soient $\alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et A, B, C, D quatre événements deux à deux incompatibles tels que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(D) = \alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} - \alpha$$

Les événements $A \cup B$ et $A \cup D$ sont-ils indépendants ? Même question pour les événements $A \cup B$ et $A \cup C$? Dans le cas d'une réponse positive aux deux questions précédentes, sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 4. On tire 3 boules au hasard et simultanément d'une urne qui en contient $n (n \geqslant 3)$. Les boules étant numérotées de 1 à n, calculer, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ la probabilité de A_k : «le plus petit numéro tiré est k » et B_k : «le plus grand numéro tiré est k.»

Exercice 5 (Urne de Polya). Dans une urne contenant b boules bleues et r boules rouges, on effectue un tirage puis on remet la boule tirée avec c boules de la même couleur. On répète l'opération. En notant A_n l'événement : « le n-ième tirage amène une boule bleue », calculer $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Un homme a l'habitude d'oublier sa clef chez lui, avec une probabilité p.

Il a cinq poches et quand il prend sa clef, il la met au hasard dans une de ses cinq poches.

Aujourd'hui, comme d'habitude, il cherche sa clef et vient de fouiller quatre poches en vain. Quelle est la probabilité qu'elle soit dans la dernière poche ?

Exercice 7. Une boîte contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2, …, N_k de couleurs c_k. (On a donc $N_1 + \cdots + N_k = N$).

On tire n boules et on cherche la probabilité d'obtenir exactement n_1 boules de couleurs c_1, …, n_k boules de couleur c_k (avec donc $n_1 + \cdots + n_k = n$).

a) Dans le cas de tirages successifs sans remise.
b) Dans le cas de tirages successifs avec remise.

Exercice 8 (Calcul de la fonction φ en arithmétique : la connaissance de cette fonction est au programme, cf chap A3). Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère l'espace probabilisé $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ muni de la tribu totale et de l'équiprobabilité.

a) Pour tout q diviseur de n ; on note A_q l'ensemble des multiples de q contenus dans Ω. Calculer $\mathbb{P}(A_q)$.
b) Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les diviseurs premiers (distincts) de n. Montrer que les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.
c) Soit B_n l'ensemble des entiers i premiers avec n compris entre 1 et n. Montrer que

$$|B_n| = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exercice 9. On considère N urnes, numérotées par un $n \in [\![1, N]\!]$ et telles que l'urne numéro n contiennent n boules blanches et $N - n$ boules noires. On choisit une urne aléatoirement et on y effectue alors des tirages avec remise.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que la $(k+1)$-ème boule soit blanche sachant que les k premières étaient blanches. *Indication* – On pourra calculer la probabilité d'avoir choisi la n-ième urne sachant que les k premières boules sont blanches
b) Que se passe-t-il si $N \to +\infty$?

Théorie sur les tribus

Exercice 10 (Tribu engendrée)**.**
a) Justifier que si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille des tribus sur un ensemble Ω alors $\bigcap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ est encore une tribu de Ω.
b) En déduire que pour toute partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ il existe une plus petite tribu de Ω contenant $\mathcal{M}$. On l'appelle par la suite la tribu engendrée par $\mathcal{M}$ et on la note $\sigma(M)$.

Exercice 11 (Un rare cas où la tribu engendrée par une partie est facile à décrire : tribu engendrée par une partition (Téméo-Justin))**.** Soit Ω un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles non vides de Ω qui forme une *partition* de Ω c'est-à-dire telle que Ω soit l'union disjointe des A_i et telle que l'ensemble I des indices soit *dénombrable.*

Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par la famille $(A_i)_{i\in I}$ qu'on note $\mathcal{T}=\sigma((A_i)_{i\in I})$.

a) A titre d'exemple on considère $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, et la partition $\Omega=A_1\coprod A_2\coprod A_3$, où $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3,4\}$, $A_3=\{5,6\}$ déterminer explicitement la tribu $\sigma(\{A_1,A_2,A_3\})$.
b) On revient au cas général. Montrer que les éléments de $\mathcal{T}$ sont exactement les ensembles de la forme $\cup_{i\in J}A_i$ pour tous les sous-ensembles J de I. On dit que les A_i sont les « atomes » de cette tribu, en ce sens que ce sont les éléments non vides minimaux pour l'inclusion.
c) En considérant $\Omega=\mathbb{R}$ et pour tout $i\in\mathbb{Z}$, $A_i=[i,i+1[$, et en notant $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par la famille $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est-elle dénombrable ?

Exercice 12 (Des événements importants cf. Borel-Cantelli ci-dessous)**.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements dans un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$.
a) Montrer que $B:=\{\omega\in\Omega,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N},\ \omega\in\bigcap_{n\geq n_0}A_n\}$ est un événement i.e. que $B\in\mathcal{A}$.
On dira que B est l'événement « A_n est réalisé A.P.C.R »
b) Montrer que $C:=\{\omega\in\Omega,\ \omega$ n'appartient qu'à un nombre *fini* d'événements $A_n\}$ est encore un événement i.e. $C\in\mathcal{A}$.
c) En déduire que l'événement $D:=\{\omega\in\Omega,\ \omega$ appartient à un nombre *infini* d'événements $A_n\}$ est un événement. On dit que D est l'événement « A_n est réalisé infiniment souvent ».

Théories sur la notion de probabilité

Exercice 13. Soit on considère l'espace probabilisable $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. La fonction $P:\ \mathcal{P}(\mathbb{N})\to[0,1]$, $A\mapsto\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{\mathrm{Card}(A\cap[\![0,N]\!])}{N+1}$ est-elle une probabilité sur cet espace ?
Indication – On pourra s'intéresser à la valeur de $P(\{n\})$ si P est une proba.

Exercice 14 (Une excursion dans le monde continu.. pas si différent du tirage à pile ou face..)**. Question :** Quelle est la probabilité qu'un nombre pris au hasard dans $]0,1[$ ait dans son développement décimal le chiffre 7 ?

Cadre mathématique précis : Intuitivement, on peut dire que la probabilité de choisir un nombre dans un intervalle de $]0,1[$ est proportionnelle à la longueur de cet intervalle et comme la probabilité de $]0,1[$ doit être égale à 1 , on est amené à poser que la probabilité d'un intervalle de $]0,1[$ est donnée par sa longueur. Prenons donc comme modèle mathématique l'espace probabilisé suivant :

- $\triangleright$ $\Omega=]0,1[$,
- $\triangleright$ $\mathcal{A}$ = la tribu engendrée par tous les intervalles de $]0,1[$, tribu des boreliéns
- $\triangleright$ P une proba telle que si I est un intervalle alors $P(I)$ = longueur de I.

On admet ici qu'une telle tribu et une telle mesure existent (c'est ce que l'on appelle la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de l'intervalle $]0,1[$). Répondre alors à la question posée.
Indication – On pourra voir l'événement considéré E comme une union disjointe $E=\coprod_{i=1}^{+\infty}A_i$ où A_i est l'événement : « le chiffre 7 apparaît pour la première fois à la i-ième décimale » (on justifiera que les A_i sont bien des événements, dont on calculera la proba.).

Autour de Borel-Cantelli

Exercice 15 (Premier lemme de Borel Cantelli)**.** a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que l'événement « A_n est réalisé infiniment souvent » défini plus haut est de probabilité nulle. b) Soit une urne contenant au départ deux boules, une rouge et une noire. On effectue une suite de tirages et à chaque tirage on rajoute une boule rouge dans l'urne. Au n-ème tirage l'urne contient n boules rouges et une boule noire.

Montrer que presque sûrement, on ne verra la boule noire sortir deux fois de suite qu'un nombre fini de fois. (On verra plus tard que presque sûrement la boule noire sortira une infinité de fois)