

D.S. 6 Centrale MP 2008 solution

I.A -

1. L'équation étant linéaire, normalisée et ses coefficients des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'énonce : Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = u$ et $y'(0) = v$. Soit maintenant y une solution vérifiant $y(0) = 0$. Posons $z(x) = y(-x)$. Alors $z''(x) = y''(-x)$ et, par parité de q :

$$z''(x) + (\lambda - q(x))z(x) = y''(-x) + (\lambda - q(-x))y(-x) = 0$$

Donc z est solution de (E_λ) et, puisque $z(0) = 0 = -y(0)$, $z'(0) = -y'(0)$, l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz atteste de l'égalité $z = -y$, c'est-à-dire que y est impaire. La réciproque est évidente.

2. Soient y et z deux solutions. Leur wronskien vaut $W = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z$. Si y et z sont toutes deux paires, on a $y'(0) = z'(0) = 0$. Si elles sont toutes deux impaires, $y(0) = z(0) = 0$. Dans les deux cas, $W(0) = 0$, ce qui prouve que (y, z) n'est pas une base de solutions.

Soit alors λ une valeur propre de Q . L'espace propre correspondant est égal à $E_2 \cap S_{E_\lambda}$ (où S_{E_λ} est l'espace des solutions de E_λ). Il est non réduit à $\{0\}$ par définition. On sait de plus que $\dim S_{E_\lambda} = 2$ et on vient de voir que S_{E_λ} ne peut être contenu dans E_2 . Donc $\dim(E_2 \cap S_{E_\lambda}) = 1$.

I.B -

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $y'' + (\lambda - a)y = 0$ admet une droite de solutions impaires, dont une base est $x \mapsto \text{sh}(\sqrt{a - \lambda}x)$ si $\lambda < a$, $x \mapsto x$ si $\lambda = a$ et $x \mapsto \sin(\sqrt{\lambda - a}x)$ si $\lambda > a$. Les deux premiers types d'application ne sauraient être périodiques, car non bornées. Toute valeur propre vérifie donc $\lambda > a$. En outre, l'application $x \mapsto \sin(\sqrt{\lambda - a}x)$ admet $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda - a}}$ pour plus petite période strictement positive. Elle est donc 2π -périodique si et seulement si $\sqrt{\lambda - a} \in \mathbb{N}^*$. Le même raisonnement est valable à propos de l'opérateur B . Ainsi : Le spectre de A est $\{a + k^2, k \in \mathbb{N}^*\}$ et un vecteur propre unitaire associé à $a + k^2$ est s_k . Le spectre de B est $\{b + k^2, k \in \mathbb{N}^*\}$ et un vecteur propre unitaire associé à $b + k^2$ est s_k .

2. On a :

$$(\cdot | A(f)) = (f | (-f'' + af)) = -(f | f'') + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} af^2 \leq -(f | f'') + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} qf^2 = (f | Q(f))$$

De la même façon, $f | Q(f) \leq f | B(f)$.

II. Problème approché de dimension finie

II.A -

1. Dans un espace vectoriel préhilbertien, tout sous-espace de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal. Ceci justifie l'existence de Π_n . Comme la famille $(s_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est orthonormale, le cours nous apprend que $\Pi_n(f)$

$$\Pi_n(f) = \sum_{k=1}^n (f | s_k) s_k$$

Autrement dit compte tenu de l'impairité de f , $\Pi_n(f)$ est égal à la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de f :

$$\Pi_n(f) = \sum_{k=1}^n b_n(f) s_k$$

2. L'endomorphisme Π_n est un projecteur orthogonal de E , donc diagonalisable dans une b.o.n. associé à la décomposition de l'espace en noyau et image de Π_n c'est donc un *endomorphisme symétrique* ce qui montre la propriété demandée.

3. Deux intégrations par parties successives (où les crochets sur nul grâce à la 2π périodicité) donnent :

$$\begin{aligned}(f | Q(g)) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(-g'' + qg) \\ &= \frac{1}{\pi} \left([-fg']_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'g' + \int_0^{2\pi} qfg \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left([f'g]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''g' + \int_0^{2\pi} qfg \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-f'' + qf)g = (Q(f) | g)\end{aligned}$$

Donc, pour tous $f, g \in V_n$ (en utilisant $\Pi_n(f) = f$ et $\Pi_n(g) = g$) :

$$(f | Q_n(g)) = (f | \Pi_n \circ Q(g)) = (\Pi_n(f) | Q(g)) = (f | Q(g)) = (Q(f) | g) = (Q(f) | \Pi_n(g)) = (\Pi_n \circ Q(f) | g) = (Q_n(f) | g)$$

II.B -

1. On a, pour $f \in V_n$: $(f | A_n(f)) = (f | \Pi_n \circ A(f)) = (\Pi_n(f) | A(f)) = (f | A(f))$ et, de la même façon, $f | Q_n(f) = f | Q(f)$, $f | B_n(f) = f | B(f)$. Les inégalités demandées résultent donc immédiatement de I.B.2).

2. (a) L'espace V_n est stable par dérivation, donc stable par A et, pour $f \in V_n$, $A_n(f) = A(f)$. Les valeurs propres de A_n sont donc les valeurs propres de A pour lesquelles on trouve un vecteur propre dans V_n , c'est-à-dire, d'après I.B.1), les $a + k^2$, $1 \leq k \leq n$. De même, les valeurs propres de B_n sont les $a + k^2$, $1 \leq k \leq n$.

(b) Puisque $\dim(V_k) = k$ et $\dim(\text{Vect}(e_{k,n}, \dots, e_{n,n}) = n - k + 1$, ces deux sous-espaces de V_n (qui est de dimension n) ne sauraient être en somme directe. Leur intersection contient donc un élément non nul f , qu'on peut choisir de norme 1. Posons $f = \sum_{j=1}^k c_j s_j$. On a $f | B(f) = \sum_{j=1}^k (b + j^2) c_j^2 \leq (b + k^2) \sum_{j=1}^k c_j^2 = b + k^2$. De la même façon, en décomposant f sur les $e_{k,n}, \dots, e_{n,n}$, il vient $f | Q(f) \geq \lambda_{k,n}$ puis, en utilisant I.B.2) :

$$\lambda_{k,n} \leq f | Q(f) \leq f | B(f) \leq k^2 + b$$

L'inégalité $k^2 + a \leq \lambda_{k,n}$ se prouve de la même façon, en prenant en considération les sous-espaces $\text{Vect}(s_k, \dots, s_n)$ et $\text{Vect}(e_{1,n}, \dots, e_{k,n})$ de V_n .

(c) On a pour tout $f \in V_{n-1}$, $f | Q_n(f) = f | Q(f) = f | Q_{n-1}(f)$. Il vient, en considérant cette fois-ci les espaces $\text{Vect}(e_{1,n-1}, \dots, e_{k,n-1})$ et $\text{Vect}(e_{k,n}, \dots, e_{n,n})$ de V_n et un élément f de norme 1 de leur intersection :

$$\lambda_{k,n} \leq f | Q(f) = f | Q_{n-1}(f) \leq \lambda_{k,n-1}$$

II.C -

La suite $(\lambda_{k,n})_n$ est, d'après les questions précédentes, une suite décroissante à valeurs dans le segment I_k . Elle converge donc vers un élément λ_k de I_k . De plus, puisque pour tout $n \geq k+1$, $\lambda_{k,n} \leq \lambda_{k+1,n}$, on a en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$: $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$.

III. Valeurs propres de Q

III.A -

1. (a) Il suffit de substituer à y_n la fonction $\pm \frac{y_n}{\|y_n\|_2}$.

(b) On a

$$Q_n(y_n) = \Pi_n(Q(y_n)) = \Pi_n(-y_n'' + qy_n) = -y_n'' + \Pi_n(qy_n)$$

car, V_n étant stable par dérivation, on a $y_n'' \in V_n$.

Il vient $\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = \|Q(y_n) - Q_n(y_n)\|_2 = \|-y_n'' + qy_n + y_n'' - \Pi_n(qy_n)\|_2 = \|qy_n - \Pi_n(qy_n)\|_2$.

(c) De $y_n = \sum_{m=1}^n b_m(y_n) s_m$, on déduit

$$qy_n - \Pi_n(qy_n) = \sum_{m=1}^n b_m(y_n) qs_m - \sum_{m=1}^n b_m(y_n) \Pi_n(qs_m) = \sum_{m=1}^n b_m(y_n) [qs_m - \Pi_n(qs_m)]$$

(d) Par b) et c) :

$$\begin{aligned}\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = \|qy_n - \Pi_n(qy_n)\|_2 &= \left\| \sum_{m=1}^n b_m(y_n) [qs_m - \Pi_n(qs_m)] \right\|_2 \\ &\leq \sum_{m=1}^n |b_m(y_n)| \| [qs_m - \Pi_n(qs_m)] \|_2 \\ &\leq \sum_{m=1}^n |b_m(y_n)| r_{m,n}\end{aligned}$$

On a par ailleurs, par Pythagore,

$$\begin{aligned}r_{m,n}^2 &= \|qs_m\|_2^2 - \|\Pi_n(qs_m)\|_2^2 \\ &\leq \|qs_m\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(t)^2 s_m^2(t) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(t)^2 dt = \|q\|_2^2\end{aligned}$$

(e) L'équation $Q_n(y_n) = \alpha_n y_n$ entraîne, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $b_m(-y_n'' + qy_n - \alpha_n y_n) = 0$.

Par ailleurs, deux intégrations par parties successives donnent la relation classique pour les coefficients de Fourier :

$$b_m(y_n'') = -m^2 b_m(y_n)$$

Donc $m^2 b_m(y_n) + b_m(qy_n) - \alpha_n b_m(y_n) = 0$.

(f) L'inégalité de Cauchy-Schwarz indique

$$|b_m(y_n)| = |(y_n | s_m)| \leq \|y_n\|_2 \|s_m\|_2 = 1$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}|b_m(qy_n)| &= |(qy_n | s_m)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |qy_n s_m| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |qy_n| \leq \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} q^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} y_n^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|q\|_2 \|y_n\|_2 \leq \|q\|_2\end{aligned}$$

Donc par e) :

$$m^2 |b_m(y_n)| = |b_m(qy_n) - \alpha_n b_m(y_n)| \leq |b_m(qy_n)| + |\alpha_n| |b_m(y_n)| \leq \|q\|_2 + |\alpha_n| \leq C$$

(g) Pour prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = 0$ il suffit de prouver, d'après la question d. ci-dessus, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^n |b_m(y_n)| r_{m,n} = 0$.

Or, pour $n \geq m \geq 1$, on a d'après les questions d. et f. :

$$|b_m(y_n)| r_{m,n} \leq \frac{K \|q\|_2}{m^2} = \frac{C}{m^2}$$

D'après le résultat du préliminaire, il suffit donc pour conclure de prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |b_m(y_n)| r_{m,n} = 0 \quad \forall m \geq 1.$$

Or $|b_m(y_n)| = |(s_m | y_n)| \leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et

$$r_{m,n} = \|qs_m - \Pi_n(qs_m)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par le II.A.1) car la fonction qs_m est bien un élément de E puisque q est paire. Ce qui établit le résultat.

2. (a) $\|z_n\|_2 = \|Q(y_n) - \alpha_n y_n + (\alpha_n - \alpha) y_n\|_2 \leq \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 + |\alpha_n - \alpha| \|y_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par 1)g) et par $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

(b) Posons $W(x) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$. Alors

$$W'(x) = \begin{vmatrix} u' & v' \\ u' & v' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \\ -(\alpha - q)u & -(\alpha - q)v \end{vmatrix} = 0$$

Donc W est constant, égal à $W(0) = 1$.

(c) On a $y_n'' + (\alpha - q)y_n = -z_n$. On peut donc regarder y_n comme solution de l'équation différentielle $y'' + (\alpha - q)y = -z_n$. À ce titre, la méthode de la variation des constantes nous assure de l'existence de deux fonctions ϕ et ψ de classe C^1 pour lesquelles $y_n = \phi u + \psi v$ et :

$$\begin{cases} \phi' u + \psi' v = 0 \\ \phi' u' + \psi' v' = -z_n \end{cases}$$

Il vient, puisque le wronskien vaut 1, $\phi' = \begin{vmatrix} 0 & v \\ -z_n & v' \end{vmatrix} = z_n v$ et $\psi' = \begin{vmatrix} u & 0 \\ u' & -z_n \end{vmatrix} = -z_n u$. D'où, en utilisant les condition initiales $u(0) = 1, u'(0) = 0, v(0) = 0, v'(0) = 1$:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_n(0)u + y_n'(0)v + \left(\int_0^x z_n(t)v(t)dt \right) u(x) - \left(\int_0^x z_n(t)u(t)dt \right) v(x) \\ &= y_n'(0)v(x) + \int_0^x K(x,t)z_n(t)dt \end{aligned}$$

où $K(x,t) = u(x)v(t) - u(t)v(x)$ (K est bien continue).

(d) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|f_n(x)| \leq \left| \int_0^x K(x,t)^2 dt \right|^{1/2} \left| \int_0^x z_n(t)^2 dt \right|^{1/2}$$

Soit J un segment de $\mathbb{R}$. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $J \subset [-2m\pi, 2m\pi]$. Puisque z_n est 2π périodique, on a, pour $x \in [-2m\pi, 2m\pi]$, $\left| \int_0^x z_n(t)^2 dt \right| \leq m \int_0^{2\pi} z_n(t)^2 dt \leq m\pi \|z_n\|_2^2$. Si on pose (continuité de K) $M = \sup_{[-2m\pi, 2m\pi]^2} |K|$, il vient : $\forall x \in J$,

$$|f_n(x)| \leq \sqrt{2m\pi M^2} \sqrt{m\pi \|z_n\|_2^2} \leq \sqrt{2\pi m M} \|z_n\|_2$$

Donc $(f_n)_n$ tend uniformément vers 0 sur tout segment de $\mathbb{R}$.

(e) On a $\int_0^{2\pi} (y_n(x) - y_n'(0)v(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} f_n(x)^2 dx$. Or $(f_n^2)_n$, carré d'une suite uniformément convergente vers 0 sur le segment $[0, 2\pi]$, converge uniformément vers 0 sur $[0, 2\pi]$ (car une suite de fonctions uniformément convergente sur un segment est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$).

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} (y_n(x) - y_n'(0)v(x))^2 dx = 0$. Ainsi on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - y_n'(0)v\|_2 = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n'(0)v\|_2 - \|y_n\|_2 = 0$ et, puisque $y_n'(0) \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n'(0) = \frac{1}{\|v\|_2}$.

(f) La relation $y_n(x) = y_n'(0)v(x) + f_n(x)$ et ce qui précède montre que y_n converge uniformément sur tout compact vers $\frac{v}{\|v\|_2}$. On en déduit que v est 2π -périodique et impaire et est, par conséquent, vecteur propre de Q pour la valeur propre α .

III.B -

1. Soient $k, j \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geq \max(k, j)$, on a $e_{k,n} \mid e_{j,n} = \delta_{k,j}$. On sait de plus que le produit scalaire $(f, g) \mapsto f \mid g$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est continu pour $\|\cdot\|_2$. Comme $(e_{k,n})_n$ et $(e_{j,n})_n$ convergent vers e_k et e_j pour $\|\cdot\|_{\infty, [0, 2\pi]}$, donc a fortiori pour $\|\cdot\|_2$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_{k,n} \mid e_{j,n} = e_k \mid e_j$. Donc $e_k \mid e_j = \delta_{k,j}$. En particulier, e_k et e_j ne sont pas colinéaires pour $j \neq k$ et $\lambda_j \neq \lambda_k$ (car les espaces propres de Q sont de dimension 1). La suite $(\lambda_k)_k$ qu'on sait croissante est donc strictement croissante.

2. (a) On a $-e_{k,n}'' + (q - \lambda_{k,n})e_{k,n} = 0$ donc $b_m(e_{k,n}'' + (q - \lambda_{k,n})e_{k,n}) = 0$ puis $m^2 b_m(e_{k,n}) + b_m(qe_{k,n}) - \lambda_{k,n} b_m(e_{k,n}) = 0$ et $(\lambda_{k,n} - m^2)b_m(e_{k,n}) = b_m(qe_{k,n})$. Or on a $m^2 < k^2 + a < \lambda_{k,n}$

donc $0 < k^2 + a - m^2 \leq \lambda_{k,n} - m^2$. D'autre part, $|b_m(qe_{k,n})| = |(qe_{k,n} | s_m)| \leq |(q | e_{k,n})| \|s_m\|_\infty \leq \|q\|_2 \|e_{k,n}\|_2 \|s_m\|_2 \leq \|q\|_2$. Il vient

$$|(e_{k,n} | s_m)| = |b_m(e_{k,n})| \leq \frac{|b_m(qe_{k,n})|}{k^2 + a - m^2} \leq \frac{\|q\|_2}{k^2 + a - m^2}$$

(b) Fixons $m \in \mathbb{N}^*$, puis $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $K^2 + a > m^2$. Posons, pour $n \geq \max(K, m)$, et $K \leq k \leq n$, $x_{k,n} = (e_{k,n} | s_m)^2$ et $\xi_k = \left(\frac{\|q\|_2}{k^2 + a - m^2}\right)^2$, de sorte que $|x_{k,n}| \leq \xi_k$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e_{k,n} | s_m) = (e_k | s_m)$ par continuité du produit scalaire relativement à $\|\cdot\|_\infty$. Comme la série $\sum_{k=K}^\infty \xi_k$ converge, on peut utiliser le résultat admis en préliminaire et conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=K}^n (e_{k,n} | s_m)^2 = \sum_{k=K}^\infty (e_k | s_m)^2$$

Or, de manière évidente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{K-1} (e_{k,n} | s_m)^2 = \sum_{k=1}^{K-1} (e_k | s_m)^2$. Il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (e_{k,n} | s_m)^2 = \sum_{k=1}^\infty (e_k | s_m)^2$$

Et, $(e_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ étant une base orthonormée de V_n auquel appartient s_m , on a, pour tout n comme ci-dessus, $\sum_{k=1}^n (e_{k,n} | s_m)^2 = \|s_m\|^2$. On conclut

$$\sum_{k=1}^\infty (e_k | s_m)^2 = \|s_m\|^2 = 1$$

Enfin, de

$$\begin{aligned} \left\| s_m - \sum_{k=1}^n (e_k | s_m) e_k \right\|_2^2 &= \|s_m\|_2^2 + \sum_{k=1}^n (e_k | s_m)^2 - 2 \sum_{k=1}^n (e_k | s_m) (s_m | e_k) \\ &= \|s_m\|_2^2 - \sum_{k=1}^n (e_k | s_m)^2 \end{aligned}$$

on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|s_m - \sum_{k=1}^n (e_k | s_m) e_k\|_2 = 0$.

3. Soit $f \in E$ orthogonale à tous les e_k . On a (la seconde égalité provient de la continuité du produit scalaire) :

$$f | s_m = \lim_{n \rightarrow +\infty} f \left| \sum_{k=1}^n (e_k | s_m) e_k \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (e_k | s_m) (f | e_k) = 0$$

Tous les coefficients de Fourier de f sont nuls ce qui, par le résultat admis en II.A.1. , entraîne $f = 0$.

4. Si λ est une valeur propre de Q distincte de chaque λ_k , et e un vecteur propre associé à λ , alors e est orthogonal à tous les e_k (car les espaces propres de Q sont deux à deux orthogonaux en raison de la relation de symétrie $Q(f)|g = f|Q(g)$). Donc $e = 0$ ce qui est absurde.

IV - Une suite de valeurs propres de Q

IV. A -

1. La fonction

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} y'_\lambda(x), y_\lambda(x) \right) \end{aligned}$$

est de classe C^1 et ne s'annule pas. Elle prend en outre la valeur $(1, 0)$ en $x = 0$. Le théorème de relèvement assure l'existence de deux fonctions $r_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\theta_\lambda(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = r_\lambda(x) ((\cos(\theta_\lambda(x)), \sin(\theta_\lambda(x)))$.

2. En dérivant les expressions $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}y'_\lambda(x) = r_\lambda \cos(\theta_\lambda)$ et $y_\lambda(x) = r_\lambda \sin(\theta_\lambda)$, puis en utilisant les relations $y''_\lambda = -(\lambda - q)y_\lambda$ et $y'_\lambda = \sqrt{\lambda}r_\lambda \cos(\theta_\lambda)$, il vient :

$$\begin{cases} (1) & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\lambda - q)r_\lambda \sin(\theta_\lambda) = r'_\lambda \cos(\theta_\lambda) - r_\lambda \theta'_\lambda \sin(\theta_\lambda) \\ (2) & \sqrt{\lambda}r_\lambda \cos(\theta_\lambda) = r'_\lambda \sin(\theta_\lambda) + r_\lambda \theta'_\lambda \cos(\theta_\lambda) \end{cases}$$

Évaluant $-\sin(\theta_\lambda) \times (1) + \cos(\theta_\lambda) \times (2)$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\lambda - q)r_\lambda \sin^2(\theta_\lambda) + \sqrt{\lambda}r_\lambda \cos^2(\theta_\lambda) = r_\lambda \theta'_\lambda$$

d'où, puisque $r_\lambda > 0$:

$$\sqrt{\lambda} - \frac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2(\theta_\lambda) = \theta'_\lambda$$

Comme $\theta_\lambda(0) = 0$, θ_λ est bien la solution maximale de (T_λ) (qui est unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz).

3. En évaluant $\cos(\theta_\lambda) \times (1) + \sin(\theta_\lambda) \times (2)$, on a cette fois :

$$\frac{q}{2\sqrt{\lambda}}r_\lambda \sin(2\theta_\lambda) = r'_\lambda$$

IV. B -

1. Si l'on pose $u(t) = \theta(\lambda, t) - \sqrt{\lambda}t$, on a $u(0) = 0$ et $u'(t) = \theta'_\lambda(t) - \sqrt{\lambda} = -\frac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2(\theta_\lambda)$ d'où $|u'(t)| \leq \frac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}$ et, par l'inégalité des accroissements finis, pour $t \geq 0$, $|u(t)| \leq \frac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}t$. On en déduit $|2\theta(\lambda, t) - 2\sqrt{\lambda}t| \leq \frac{2\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}t$ et, puisque $\cos$ est 1-lipschitzienne :

$$|\cos(2\theta(\lambda, t)) - \cos(2\sqrt{\lambda}t)| \leq \frac{2\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}t$$

2. On a

$$\begin{aligned} \theta(\lambda, t) &= \int_0^{2\pi} \theta'_\lambda(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\lambda} - \frac{q(t)}{2\sqrt{\lambda}} (1 - \cos(2\theta_\lambda(t))) \right) dt \\ &= 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\theta_\lambda(t)) dt \\ &= 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\sqrt{\lambda}(t)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) (\cos(2\theta_\lambda(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda}(t))) dt \end{aligned}$$

et l'inégalité cherchée, pour $K = 2\pi^2\|q\|_\infty^2$, résulte de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left| \int_0^{2\pi} q(t) (\cos(2\theta_\lambda(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda}(t))) dt \right| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} |q(t)| |\cos(2\theta_\lambda(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda}(t))| dt \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} \frac{2\|q\|_\infty |q(t)|}{\sqrt{\lambda}} t dt \\ &\leq \frac{2\pi^2\|q\|_\infty^2}{\lambda} \end{aligned}$$

3. b) Puisque q est continue, le lemme de Riemann-Lebesgue permet d'affirmer :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\sqrt{\lambda}t) dt = 0$$

Donc

$$\theta(\lambda, 2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 2\pi\sqrt{\lambda} \left[1 - \frac{1}{4\pi\lambda} \int_0^{2\pi} q(t)dt + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

4. La question précédente prouve évidemment que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \theta(\lambda, 2\pi) = +\infty$. En particulier il existe λ_0 tel que $\theta(\lambda_0, 2\pi) = \theta_0 > 0$. Soit alors un entier $k_0 > 0$ tel que $2k_0\pi \geq \theta_0$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $\lambda \mapsto \theta(\lambda, 2\pi)$ (supposée continue) entre λ_0 et $+\infty$ montre qu'il existe un réel μ_{k_0} tel que $\theta(\mu_{k_0}, 2\pi) = 2k_0\pi$.

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à cette même fonction mais cette fois entre μ_{k_0} et $+\infty$ montre qu'il existe un réel $\mu_{k_0+1} > \mu_{k_0}$ tel que $\theta(\mu_{k_0+1}, 2\pi) = 2(k_0+1)\pi$. L'itération est claire. Ainsi il existe un entier $k_0 > 0$ et une suite $(\mu_k)_{k \geq k_0}$ strictement croissante de réels strictement positifs telle que $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$.

5. La suite croissante $(\mu_k)_k$, si elle était majorée, serait convergente et la suite $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$ convergerait aussi, ce qui n'est pas. Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = +\infty$. La relation prouvée en IV.B.3) montre alors, quand $k \rightarrow +\infty$,

$$2k\pi = 2\pi\sqrt{\mu_k} \left[1 - \frac{1}{4\pi\mu_k} \int_0^{2\pi} q(t)dt + o\left(\frac{1}{\mu_k}\right) \right]$$

d'où

$$4k^2\pi^2 = 4\pi^2\mu_k \left[1 - \frac{1}{2\pi\mu_k} \int_0^{2\pi} q(t)dt + o\left(\frac{1}{\mu_k}\right) \right]$$

puis

$$\mu_k - k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t)dt + o(1)$$

IV. C -

1. Puisque q est paire et 2π -périodique, les fonctions $x \mapsto -\theta_\lambda(-x)$ et $x \mapsto \theta_\lambda(x+2\pi) - 2k\pi$ sont solution du problème de Cauchy (T_λ) . Par unicité de la solution à ce problème on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\theta_\lambda(x) = -\theta_\lambda(-x) \text{ et } \theta_\lambda(x+2\pi) - 2k\pi = \theta_\lambda(x)$$

2. Par 2π -périodicité de u , $\int_x^{x+2\pi} u(t)dt$ est indépendant de x , donc égal à $\int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt$ qui est nul par imparité de u . Ceci prouve que $x \mapsto \int_0^x u(t)dt$ est 2π -périodique. On voit aussi immédiatement que c'est une fonction paire. Or, d'après IV.A.3), on a :

$$r_\lambda(x) = r_\lambda(0) \exp\left(\int_0^x \frac{q(t)}{2\sqrt{\lambda}} \sin(2\theta_\lambda(t)) dt\right)$$

Comme $t \mapsto q(t) \sin(2\theta_\lambda(t))$ est impaire et 2π -périodique (par IV.C.1)), r_λ est 2π -périodique et paire.

3. Il résulte de ceci que $y_\lambda = r_\lambda \sin \theta_\lambda$ est 2π -périodique et impaire. Par conséquent, Q admet λ pour valeur propre.

4. Ce qui précède montre que la suite (μ_k) est une suite croissante de valeurs propres de Q .

V. Comportement asymptotique

V.A -

1. De $a \leq q \leq b$, on déduit immédiatement $a \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t)dt \leq b$. Si par exemple on avait $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t)dt = b$ alors on aurait $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (b - q(t))dt = 0$ ce qui, par continuité de q et positivité de $b - q$, conduirait à $\forall t, q(t) = b$. Comme q n'est pas constante, c'est une contradiction. 2. (a) On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} (k+1)^2 - k^2 = +\infty$. Donc il existe $k_1 \geq k_0$ tel que $k \geq k_1$ entraîne $k^2 + b < (k+1)^2 + a$, puis $I_k \cap I_{k+1} = \emptyset$. (b) On sait que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k - k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t)dt \in]a, b[$. Donc $\mu_k \in [k^2 + a, k^2 + b]$ dès que k est assez grand. Ainsi il existe k_2 tel que μ_k soit une valeur propre de Q qui appartient à I_k dès que $k \geq k_2$.

Or les valeurs propres de Q sont exactement les λ_k et $\lambda_k \in I_k$. Comme $I_k \cap I_{k+1} = \emptyset$ pour $k \geq k_1$, I_k ne contient, pour $k \geq k_1 + 1$, qu'un unique élément de la suite $(\lambda_j)_j$, à savoir λ_k . Donc

$k \geq \max(k_2, k_1 + 1) \implies \mu_k = \lambda_k$. Le comportement asymptotique découle immédiatement de IV.B.4.b).