

D.S. 6 MP : Niveau Centrale-Mines

Dans tout ce problème $\mathcal{C}_{2\pi}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues, 2π -périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ muni du produit scalaire défini par :

$$(f | g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

dont la norme associée est notée $\| \cdot \|_2$.

Le choix du facteur $\frac{1}{\pi}$ dans la définition du produit scalaire (contrairement à $\frac{1}{2\pi}$ habituellement) s'impose par la nécessité de rendre les fonctions $c_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $s_k : x \mapsto \sin(kx)$ unitaires pour $k \in \mathbf{N}^*$.

Les coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sont, comme d'habitude, $a_n(f) = (f | c_n)$ et $b_n(f) = (f | s_n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_0(f) = (f | 1)$ où 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$.

On admettra pour ce problème la **formule de Parseval** suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \|f\|_2^2 = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2 + b_n(f)^2$$

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant :

« Soit, pour chaque entier naturel non nul n , $(x_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ une suite de n nombres réels. On suppose :

1. pour tout entier $k \geq 1$, la suite $(x_{k,n})_{n \geq k}$ est convergente et on note :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k,n} = x_k;$$

2. il existe une suite $(\xi_k)_{k \geq 1}$ de nombres réels positifs telle que la série de terme général ξ_k converge et :

$$\forall k \geq 1, \forall n \geq k, |x_{k,n}| \leq \xi_k.$$

Alors la série de terme général x_k converge absolument et : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \gg$.

Notations particulières : E est le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$ constitué des fonctions *impaires* et E_2 le sous-espace de E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Une *valeur propre* d'une application linéaire T de E_2 dans E (attention T n'est pas un endomorphisme) est, par définition, un réel λ tel qu'existe un élément f de $E_2 - \{0\}$ vérifiant $T(f) = \lambda f$. On définit de même la notion de vecteur propre et de sous-espace propre de T .

On fixe une fonction q de classe $\mathcal{C}^1$, paire, 2π -périodique et non constante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On sait, dans ces conditions, que la fonction q est bornée et on pose :

$$a = \inf\{q(x), x \in \mathbf{R}\}, b = \sup\{q(x), x \in \mathbf{R}\} \text{ et } \|q\|_{\infty} = \sup\{|q(x)|, x \in \mathbf{R}\}.$$

On considère alors les applications linéaires de E_2 dans E définies par :

$$A : y \mapsto -y'' + ay \quad B : y \mapsto -y'' + by \quad Q : y \mapsto -y'' + qy$$

Enfin on dit qu'une famille orthonormale $(e_k)_{k \geq 1}$ de vecteurs de E est **totale** dans E si 0 est le seul vecteur de E orthogonal à tous les e_k .

L'objectif du problème est l'étude, par diverses méthodes, des valeurs propres de Q . On peut traiter une question du problème sans avoir résolu les précédentes à condition d'en admettre clairement les résultats.

Partie I- Quelques résultats généraux

I.A - Dans cette section I.A, λ désigne un nombre réel fixé et on considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$(E_{\lambda}) : \quad y'' + (\lambda - q)y = 0$$

- I.A.1)** Énoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à l'équation (E_{λ}) et exploiter l'unicité pour prouver qu'une solution y de (E_{λ}) est impaire si et seulement si $y(0) = 0$.

- I.A.2)** Prouver, par exemple à l'aide du wronskien, que (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité. En déduire la dimension d'un sous-espace propre de Q .
- I.B.1)** Déterminer les valeurs propres des applications linéaires A et B de E_2 dans E et, pour chacune d'entre elles, un vecteur propre unitaire associé dans E_2 .
- I.B.2)** Démontrer, pour tout $f \in E_2$, les inégalités suivantes :

$$(f | A(f)) \leq (f | Q(f)) \leq (f | B(f)).$$

Partie II-Problème approché de dimension finie

II.A - Dans toute la suite du problème on note V_n le sous-espace de E_2 engendré par la famille orthonormale $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$ (on posera $V_0 = \{0\}$) et $\Pi_n \in \mathcal{L}(E)$ la projection orthogonale de E sur V_n . Si T est une application linéaire de E_2 dans E et $n \in \mathbf{N}^*$, on conviendra de noter T_n l'endomorphisme de V_n défini par $f \mapsto \Pi_n \circ T(f)$.

- II.A.1) Questions de cours avec des justifications brèves :** justifier l'existence de Π_n . Exprimer $\Pi_n(f)$ à l'aide des fonctions (s_k) .

On admettra pour toute la suite du problème que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \Pi_n(f)\|_2 = 0$

- II.A.2)** Démontrer, pour tout couple $(f, g) \in E^2$, la relation $(f | \Pi_n(g)) = (\Pi_n(f) | g)$.
- II.A.3)** Établir, pour tout couple $(f, g) \in E_2^2$, que $(f | Q(g)) = (Q(f) | g)$. En déduire que Q_n est un endomorphisme symétrique de V_n .

II.B Dans la suite on notera $\lambda_{1,n} \leq \lambda_{2,n} \leq \dots \leq \lambda_{n,n}$ le système des valeurs propres de Q_n rangées par ordre croissant (chaque valeur propre apparaît donc dans la liste autant de fois que sa multiplicité l'exige) et $(e) = (e_{1,n}, e_{2,n}, \dots, e_{n,n})$ une base orthonormée de V_n telle que, pour chaque indice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $e_{k,n}$ est un vecteur propre de Q_n associé à la valeur propre $\lambda_{k,n}$.

- II.B.1)** À l'aide de la question I.B.2), démontrer, pour tout $f \in V_n$, les inégalités :

$$(f | A_n(f)) \leq (f | Q_n(f)) \leq (f | B_n(f))$$

- II.B.2)** a) Déduire de la question I.B. 1 les valeurs propres des endomorphismes A_n et B_n classées par ordre croissant.
- b) Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Montrer qu'il existe un vecteur unitaire f appartenant à $V_k \cap \text{Vect}(e_{k,n}, e_{k+1,n}, \dots, e_{n,n})$ puis que $\lambda_{k,n} \leq (f | Q(f)) \leq (f | B(f)) \leq k^2 + b$. On prouverait de manière analogue l'inégalité $k^2 + a \leq \lambda_{k,n}$.
- c) Dans cette question, on suppose $n \geq 2$. Démontrer que, pour tout élément f de V_{n-1} , $(f | Q_n(f)) = (f | Q_{n-1}(f))$. En déduire, en utilisant une méthode analogue à celle suggérée dans la question précédente, que si $1 \leq k \leq n-1$ alors $\lambda_{k,n-1} \geq \lambda_{k,n}$.

II.C - On pose, dans la suite du problème, $I_k = [k^2 + a, k^2 + b]$.

- II C1)** Prouver que, si $k \in \mathbf{N}^*$, la suite $(\lambda_{k,n})_{n \geq k}$ converge vers une limite $\lambda_k \in I_k$
- II C2)** et que la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ est croissante.

Partie III - Valeurs propres de Q

On se propose, dans cette partie, d'établir que les λ_k définis dans la partie II sont les valeurs propres de Q associées à un système orthonormal total de vecteurs propres.

III.A - Dans cette section III.A on considère une suite réelle $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, α_n soit une valeur propre de Q_n . On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente et on note α sa limite. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $y_n \in V_n$ un vecteur propre de Q_n associé à la valeur propre α_n . On veut prouver que α est une valeur propre de Q .

- III.A.1)** a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on peut prendre y_n unitaire et tel que $y'_n(0) \geq 0$. Cette condition sera supposée remplie dans la suite de cette partie.

- b) Démontrer que $Q_n(y_n) = -y_n'' + \Pi_n(qy_n)$. En déduire que : $\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = \|qy_n - \Pi_n(qy_n)\|_2$ dont on se propose de prouver la convergence vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.
c) Établir la relation :

$$qy_n - \Pi_n(qy_n) = \sum_{m=1}^n b_m(y_n) [qs_m - \Pi_n(qs_m)].$$

- d) Pour $1 \leq m \leq n$, on pose $r_{m,n} = \|qs_m - \Pi_n(qs_m)\|_2$. Établir les inégalités :

$$\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 \leq \sum_{m=1}^n |b_m(y_n)| r_{m,n} \text{ et } r_{m,n} \leq \|qs_m\|_2 \leq \|q\|_2.$$

- e) Prouver, pour $1 \leq m \leq n$, la relation :

$$m^2 b_m(y_n) + b_m(qy_n) - \alpha_n b_m(y_n) = 0. \quad (1)$$

- f) Prouver, pour $1 \leq m \leq n$, les trois inégalités :

$$|b_m(y_n)| \leq 1, |b_m(qy_n)| \leq \|q\|_2 \text{ et } m^2 |b_m(y_n)| \leq [\|q\|_2 + \sup \{|\alpha_n|, n \in \mathbf{N}^*\}] =: C.$$

- g) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = 0$.

III.A.2) On note (u, v) la base de solutions de l'équation $y'' + (\alpha - q)y = 0$ telle que :

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1$$

- a) On pose $z_n = Q(y_n) - \alpha_n y_n = -y_n'' + (q - \alpha_n)y_n \in E$. Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\|_2 = 0$.
b) Prouver que le wronskien de (u, v) vaut constamment 1.
c) En résolvant une équation différentielle, déterminer en fonction de u et v une fonction $K : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, continue et telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$y_n(x) = y_n'(0)v(x) + \int_0^x K(x, t)z_n(t)dt$$

- d) Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_n(x) = \int_0^x K(x, t)z_n(t)dt$$

Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend uniformément vers 0 sur tout segment de $\mathbf{R}$.

- e) Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_0^{2\pi} (y_n(x) - y_n'(0)v(x))^2 dx} = 0$. En déduire la limite de la suite $(y_n'(0))_{n \geq 1}$.
f) Établir la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbf{R}$ de la suite de fonctions $(y_n)_{n \geq 1}$ vers une fonction de norme 1 que l'on déterminera en fonction de v . En déduire que $v \in E$ et que α est une valeur propre de Q .

III.B - On reprend maintenant les fonctions $(e_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ définies à la section II.B en imposant de surcroît $e_{k,n}'(0) \geq 0$. La section III.A a établi, pour tout $k \geq 1$, la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbf{R}$ de la suite $(e_{k,n})_{n \geq k}$ vers un élément de E unitaire noté e_k qui est un vecteur propre de Q pour la valeur propre λ_k .

III.B.1) Prouver que la famille $(e_k)_k \geq 1$ est orthonormale ; en déduire que la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ est strictement croissante.

III.B.2) Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et $n \geq m$

- a) Prouver, à l'aide de la relation (1) convenablement adaptée que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $k \leq n$ et $k^2 + a > m^2$ on a :

$$|(e_{k,n} | s_m)| \leq \frac{\|q\|_2}{k^2 + a - m^2}$$

b) Prouver, grâce au préliminaire, que :

$$1 = \|s_m\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k | s_m)^2 \text{ puis } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| s_m - \sum_{k=1}^n (e_k | s_m) e_k \right\|_2 = 0$$

III.B.3) Montrer que la famille $(e_k)_{k \geq 1}$ est totale dans E . (On pourra calculer $(f | s_m)$ pour un vecteur f orthogonal à tout vecteur e_k).

III.B.4) En justifiant que les sous-espaces propres de Q sont deux à deux orthogonaux, montrer que les valeurs propres de Q sont exactement les éléments de la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$. (On pourra supposer l'existence d'une valeur propre λ différente des λ_k et calculer $(e | e_k)$ pour un vecteur propre e associé à la valeur propre λ).

Annexe IV (hors D.S.) : Un changement de fonctions inconnues donnant autrement des valeurs propres de Q

Dans cette partie IV seulement on suppose le réel λ strictement positif.

On considère les problèmes de Cauchy suivants :

- $(E_\lambda) : y'' + (\lambda - q)y = 0$ d'inconnue y avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = \sqrt{\lambda}$.
- $(T_\lambda) : \theta' = \sqrt{\lambda} - \frac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2 \theta = \sqrt{\lambda} - \frac{q}{2\sqrt{\lambda}}(1 - \cos(2\theta))$ d'inconnue θ avec $\theta(0) = 0$.

IV.A. 0) Démontrer le **théorème du relèvement** suivant, en deux temps :

- a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telle que $g(I) \subset \mathbb{U}$ et telle qu'on ait un $t_0 \in I$ pour lequel $g(t_0) = 1$. Montrer qu'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $\theta(t_0) = 0$ et $\forall t \in I, g(t) = \exp(i\theta(t))$.
- b) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telle que $f(I) \subset \mathbb{C}^*$ et qu'on a un $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) \in \mathbb{R}^{++}$. Montrer qu'il existe deux fonctions $(r, \theta) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})^2$ telle que $\forall t \in I, r(t) > 0$ et $f(t) = r(t) \exp(i\theta(t))$ et $\theta(t_0) = 0$.

IV.A.1) Soit y_λ la solution de (E_λ) sur $\mathbb{R}$.

Prouver qu'existent deux fonctions r_λ et θ_λ , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$r_\lambda > 0, \quad \frac{y'_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = r_\lambda \cos \theta_\lambda, \quad y_\lambda = r_\lambda \sin \theta_\lambda, \quad \theta_\lambda(0) = 0$$

IV.A.2) Prouver que θ_λ est solution du problème de Cauchy non linéaire (T_λ) .

Dans la suite de cette partie on posera pour tout couple $(\lambda, x) \in]0, +\infty[\times \mathbf{R}$:

$$\theta(\lambda, x) = \theta_\lambda(x)$$

IV.A.3) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont les coefficients dépendent de la fonction θ , satisfaite par r_λ .

IV.B.1) Prouver, pour tout $t \geq 0$, les inégalités :

$$|\theta_\lambda(t) - \sqrt{\lambda}t| \leq \frac{\|q\|_\infty t}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{puis} \quad |\cos(2\theta_\lambda(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda}t)| \leq \frac{2\|q\|_\infty t}{\sqrt{\lambda}}$$

IV.B.2) Prouver l'existence d'une constante K telle que :

$$\left| \theta(\lambda, 2\pi) - 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) dt - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\sqrt{\lambda}t) dt \right| \leq \frac{K}{\lambda}$$

IV.B.3) a) A l'aide du caractère $\mathcal{C}^1$ de q montrer que $\int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\sqrt{\lambda}t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

b) En déduire que, quand λ est au voisinage de $+\infty$:

$$\theta(\lambda, 2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda} \left[1 - \frac{1}{4\pi\lambda} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

IV.B.4) On admet ici que la fonction $\lambda \mapsto \theta(\lambda, 2\pi)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

a) Prouver l'existence d'un entier naturel $k_0 > 0$ et d'une suite $(\mu_k)_k \geq k_0$, strictement croissante de réels strictement positifs telle que, pour tout entier naturel $k \geq k_0$, on ait $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$.

b) Montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_k - k^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt$.

IV.C - Dans cette section IV.C on suppose que le réel $\lambda > 0$ vérifie la relation $\theta(\lambda, 2\pi) = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et on se propose de prouver que λ est valeur propre de Q .

IV.C.1) On admet l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy (T_λ) : en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\theta(\lambda, -x) = -\theta(\lambda, x)$ et $\theta(\lambda, 2\pi + x) - 2k\pi = \theta(\lambda, x)$.

IV.C.2) Prouver que si u est une fonction continue, impaire et 2π -périodique alors la fonction $x \mapsto \exp\left[\int_0^x u(t) dt\right]$ est 2π -périodique. Déduire de IV.A. 3) que r_λ est 2π périodique.

IV.C.3) Prouver que y_λ est 2π -périodique et impaire et conclure.

IV.C.4) Que représentent les réels μ_k définis dans la question (IV.B.4) pour l'application linéaire Q ?

Partie V - Comportement asymptotique

On rappelle que q est non constante.

V.1) Prouver que $a < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt < b$.

V.2) On adopte ici les notations de la question IV.B.4) dont on utilisera les résultats.

a) Démontrer l'existence d'un entier $k_1 \geq k_0$ tel que, pour $k \geq k_1$ on ait $I_k \cap I_{k+1} = \emptyset$.

b) Prouver que $\lambda_k = \mu_k$ à partir d'un certain rang. En déduire que

$$\lambda_k = k^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o(1)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$.