

D.S. 6 MP : CCINP, solution

Exercice 1 : extrait de CCINP PSI 2012 Q1

a) On calcule $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & -1 & 1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X-1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & X \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la seconde ligne,

on a :

$$\chi_A(X) = (X-2) \begin{vmatrix} X & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

En développant encore par rapport à la seconde ligne :

$$\chi_A(X) = (X-2)(X-1) \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-2)(X-1)(X^2+1) = (X-2)(X-1)(X-i)(X+i)$$

On calcule des vecteurs propres associés (comme A est à coeff. réel, pour la v.p. $-i$ le calcul est inutile, on prend le conjugué d'un vecteur propre pour i) et on trouve ;

$$A \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Le cours nous donne alors que (X_1, X_2, X_3, X_4) forment une base du $\mathbb{C}$ -e.v. des solutions de (E_0) à valeurs complexes où

$$X_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_4(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (E_0) est l'ensemble des

$$t \mapsto X(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les c_k étant des complexes arbitraires.

Q2 a) En développant le produit matriciel, on obtient les quatre équations

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -x_2(t) & +x_3(t) & -x_4(t) \\ x_2'(t) = & 2x_2(t) & +te^t & \\ x_3'(t) = & x_2(t) & +x_3(t) & +e^t \\ x_4'(t) = & x_1(t) & -x_2(t) & +x_3(t) & -te^t \end{cases}$$

On cherche une solution particulière à ces équations dans l'ordre indiqué par l'énoncé on trouve

$$Y(t) = \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -te^t \\ (-t+1)e^t \end{pmatrix}$$

b) Un système fondamental de solutions à valeurs réelles de l'équation homogène (E_0) est donné par ; $(X_3, X_4, Y_1 := \text{Re}(X_1), Y_2 := \text{Im}(X_1))$, Explicitement ;

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 0 \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Finalement, la solution générale est du type

$$\begin{pmatrix} -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + (t-1)e^t \\ c_3 e^{2t} - e^t \\ c_3 e^{2t} + c_4 e^t - t e^t \\ c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_4 e^t + (-t+1)e^t \end{pmatrix}$$

c) Pour trouver la solution au problème de Cauchy avec $X(0) = (-1, -1, -1, 0)$, on a un système à résoudre dont les inconnues sont les c_i . Le calcul au brouillon donne la solution

$$X(t) = \begin{pmatrix} (t-1)t^t \\ -e^t \\ (-t-1)e^t \\ -te^t \end{pmatrix}$$

Exercice II : CCINP MP 2014

II.1. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation (E) se réécrit sous forme résolue $y'' + \frac{a(x)}{x^2}y' + \frac{b(x)}{x^2}y = 0$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{a(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{b(x)}{x^2}$ sont continues sur I et l'équation est linéaire homogène d'ordre 2. Donc par théorème, S^+ est de dimension 2 et de même, S^- est de dimension 2.

II.2. Soit $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors f est nulle sur les intervalles I et J donc sur $\mathbb{R}^*$.

Par continuité de f en 0, $f(0) = 0$. Donc $f = 0$ ce qui montre que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. φ étant une application linéaire injective, elle définit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(\varphi)$. Or $\text{Im}(\varphi)$ est un sev de $S_1 \times S_2$ qui est un ev de dimension $2 + 2 = 4$. Donc $\text{Im}(\varphi)$ est un ev de dimension finie et $\dim(\text{Im}(\varphi)) \leq 4$. Etant isomorphe à $\text{Im}(\varphi)$, S est aussi de même dimension finie ce qui donne $\dim(S) \leq 4$.

II.3. - Soit $I_0 \in \{I, J\}$ (l'un des deux intervalles...)

Sur I_0 , l'équation est équivalente à $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$ soit au système $\begin{cases} z' + (1/x) \times z = 0 \\ y' = z \end{cases}$ - La

première équation, linéaire, homogène, d'ordre 1 a immédiatement pour ensemble solution sur l'intervalle I_0 la droite vectorielle $\{x \mapsto \frac{K}{x}, K \in \mathbb{R}\}$. - Ainsi, y est solution de (E) ssi $\exists K \in \mathbb{R}, y' = \frac{K}{x}$

ssi $\exists (K, L) \in \mathbb{R}^2, y = K \ln(|x|) + L$. - Conclusion : sur l'intervalle I ou l'intervalle J , l'ensemble solution est $\text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \ln(|x|))$ - Soit $f \in S$. Alors il existe $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = k_1 \ln(x) + k_2 \\ \forall x < 0, f(x) = k_3 \ln(|x|) + k_4 \end{cases}$ f étant continue en 0 donc bornée au voisinage de 0, on obtient

$k_1 = k_3 = 0$. La continuité à gauche et à droite en 0 impose alors $k_2 = f(0) = k_4$. Donc f est une fonction constante. - Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions constantes sont éléments de f .

Conclusion : $S = \text{Vect}(x \mapsto 1)$ et $\dim(S) = 1$.

II.4. - Notons f_α la fonction définie sur I par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Alors f_α est solution de (E) ssi $\forall x > 0, x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 6\alpha x^{\alpha-1} + 12x^\alpha = 0$ ssi $\forall x > 0, x^\alpha \times (\alpha^2 - 7\alpha + 12) = 0$ 4 et 3 sont solutions de l'équation $\alpha^2 - 7\alpha + 12$ donc les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont éléments de S^+ . - La famille $(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$ est une famille libre à 2 éléments (vérification immédiate et laissée au soin du lecteur) d'éléments de S^+ et S^+ est de dimension 2. Donc c'est une base de S^+ et $S^+ = \text{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$. - On vérifie immédiatement par le calcul que $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ définissent deux fonctions sur J solutions de (E). Elles forment également une famille libre à 2 éléments et $\dim(S^-) = 2$. Donc $S^- = \text{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$. - On vérifie que

$$S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} k_1 x^3 + k_2 x^4 & \text{si } x \geq 0 \\ k_3 x^3 + k_4 x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases}, (k_1, \dots, k_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Soit $f \in S$. D'après ce qui précède, pour vérifier que S appartient à l'ensemble proposé, il suffit de vérifier que $f(0) = 0$... On sait qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = k_1 x^3 + k_2 x^4$. La continuité de f en 0 donc à droite en 0 donne immédiatement $f(0) = \lim_0 k_1 x^3 + k_2 x^4 = 0$. Soit f dans l'ensemble proposé. Alors il existe $k_1, \dots, k_4 \in \mathbb{R}$ vérifiant ce qu'il faut... On vérifie que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$: Soit $\alpha > 0$. Au voisinage de α , f coïncide avec la fonction $x \mapsto k_1 x^3 + k_2 x^4$. Donc f est deux fois dérivable en α , $f'(\alpha) = 3k_1 x^2 + 4k_2 x^3$ et $f''(\alpha) = 6k_1 x + 12k_2 x^2$. De même, pour $\alpha < 0$, f coïncide au voisinage de α avec $x \mapsto k_3 x^3 + k_4 x^4$ donc f est deux fois dérivable en α et $f'(\alpha) = 3k_3 x^2 + 4k_4 x^3$, $f''(\alpha) = 6k_3 x + 12k_4 x^2$. Ainsi, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa

dérivée seconde f'' est clairement continue en tout point de $\mathbb{R}^*$. Donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$. De plus, f est clairement continue à droite et à gauche en 0 donc continue en 0 ainsi qu'en tout point de $\mathbb{R}^*$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$. Il ne reste qu'à vérifier que $f'(x)$ et $f''(x)$ admettent une même limite finie en 0 à droite et à gauche pour assurer, d'après le théorème de prolongement de la classe, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. D'après les expressions précédemment évoquées pour f'' et f' , ces limites existent et valent 0. Conclusion : f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Les expressions déterminées plus haut pour f' et f'' assurent immédiatement que f est solution de (E). - Conclusion : on a bien l'égalité souhaitée et S est clairement de dimension 4.

Problème

- Q 1) a) Soit $s \in \mathcal{S}(E)$. Selon le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de s : s est orthodagonalisable. Traduction matricielle : si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice P orthogonale et la matrice D diagonale telles que $S = PDP^{-1} = PD^tP$.

b) Soit

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$\chi_S(X) = X^2 - \text{Tr}(S)X + \det(S) = X^2$, donc $\text{Sp}(S) = \{0\}$ et si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui est faux. Ainsi S est symétrique à coefficients complexes sans être diagonalisable.

- Q 2) a) Notons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$. Or la base β est orthonormée, donc $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

b) Supposons que $x \in S(0, 1)$. Alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Ainsi, $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n$ et $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1$. On a bien montré que, pour tout $x \in S(0, 1)$, $R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$

- Q 3) a) Supposons que s est symétrique défini positif.

Soit λ une valeur propre de s . Il existe un vecteur propre x : x est non nul et $s(x) = \lambda x$. Ainsi $0 < \langle s(x) | x \rangle = \lambda \|x\|^2$ et $\|x\| > 0$, donc $\lambda > 0$. Si maintenant s est seulement symétrique positif, on a $0 \leq \lambda \|x\|^2$ donc $\lambda \geq 0$.

b) $s_{i,j}$ est la i -ème coordonnée dans la base B du vecteur $s(e_j)$, or B est orthonormée, car on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc

$$s_{i,j} = \langle e_i | s(e_j) \rangle.$$

En particulier, $s_{i,i} = \langle e_i | s(e_i) \rangle$, or e_i est un vecteur unitaire, donc d'après la question 2.b, $s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

- Q 4) Les coefficients de $M^T M - I_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M , donc d'après le cours, l'application $M \mapsto M^T M - I_n$ est continue. I

- Q 5) D'après le cours, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|a_{i,j}| \leq 1$.

- Q 6) Si, pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_\infty = \max_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée d'après la question précédente. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est encore bornée quelque soit la norme utilisée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si l'on note f l'application $M \mapsto {}^t M M - I_n$ de la question 2, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0_{n,n}\})$, or le singleton $\{0_{n,n}\}$ est un fermé et f est continue, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Q 7) a) D'après la question 1.a, il existe une matrice P orthogonale telle que $S = P \Delta P^{-1} = P \Delta P^T$. Ainsi, $T(A) = \text{Tr}([AP \Delta] P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1} [AP \Delta]) = \text{Tr}(B \Delta)$ en posant $B = P^{-1} A P$. A et P sont toutes deux orthogonales et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, donc B est orthogonale.

b) Par linéarité du produit par une matrice et linéarité de la trace, pour tout $(C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{Tr}((\alpha C + D)S) = \alpha \text{Tr}(CS) + \text{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \text{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

c) Avec les notations de la question a, $T(A) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$ le (i,j) -ème coefficient d'une matrice M :

$$T(A) = \sum_{i=1}^n (B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{i,j} \Delta_{j,i}$$

, mais Δ est diagonale, donc

$$T(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i}$$

D'après la question 3 ,pour la matrice orthogonale B , on a pour tout i , $B_{i,i} \leq 1$ et les λ_i étant positifs,

$$T(A) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(S)$$

Le majorant étant indépendant de la matrice A , on a ainsi $t \leq \text{Tr}(S)$, mais de plus $\text{Tr}(S) = \text{Tr}(I_n)$ et I_n est une matrice orthogonale, donc $t = \text{Tr}(S)$.

Q 8) L'inégalité demandée est une conséquence de l'inégalité arithmético-géométrique, admise dans l'énoncé car on sait que $\det(S) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Q 9) On identifiera ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$.

D'abord $S_\alpha \in S_n(\mathbb{R})$ car $S_\alpha^\top = (D^\top S D)^\top = D^\top (D^\top S)^\top = D^\top S^\top D$ par propriété $(AB)^\top = B^\top A^\top$ pour toute matrice A, B .

Comme ici $S^\top = S$, on conclut bien que $S_\alpha^\top = S_\alpha$.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ alors $X^\top S_\alpha X = (DX)^\top S (DX) \geq 0$ car $DX \in \mathbb{R}^n$ et car S est symétrique positive. Ceci montre que $S_\alpha \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Reste le calcul demandé : $\text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n (D^\top S D)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{(j,k) \in \{1, \dots, n\}^2} [D^\top]_{i,j} S_{j,k} D_{k,i}$, mais D est diagonale, donc

$$\text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}.$$

Q 10) On peut appliquer l'inégalité (*) à la matrice S_α car elle est bien dans $S_n^+(\mathbb{R})$

$$\det(S_\alpha) \leq \left(\frac{1}{n} \text{Tr}(S_\alpha) \right)^n \quad (1)$$

Or

$$\det(S_\alpha) = \det(D)^2 \det(S) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \det(S)$$

et

$$\frac{1}{n} \text{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_{i,i}} s_{i,i} = 1 \quad (2)$$

donc avec (1) et (2)

$$\det(S) \leq \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \right)^2$$

et avec la définition des α_i donnée par l'énoncé :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

Q 11) Remarque : l'énoncé original était plus compliqué (inutilement).

Si S est définie positive, les $s_{i,i} = (s(e_i)|e_i)$ sont strictement positifs, et donc la question précédente s'applique et donne la conclusion.

Si S est positive non définie positive, alors $\lambda_1 = 0$ et donc l'inégalité est évident car le minorant est nul.

Q 12) . La matrice B est symétrique pour la même raison que la matrice S_α était symétrique à la q11.

Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ${}^tXBX = {}^t(\Omega X)A(\Omega X) > 0$, car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Omega X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Ω est orthogonale, donc elle est inversible). Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus Ω est orthogonale, donc d'après le cours, $|\det(\Omega)| = 1$. Or, $\det(A) = 1$, donc $\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$: on a prouvé que $B \in \mathcal{U}$.

$\text{Tr}(AS) = \text{Tr}([A\Omega\Delta]\Omega^\top) = \text{Tr}(\Omega^\top[A\Omega\Delta]) = \text{Tr}(B\Delta)$.

Q 13) D'après la question précédente, $\{\text{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} \subset \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$.

Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. On pose $A = \Omega B \Omega^\top$. En adaptant la démonstration de la question précédente, on montre que $A \in \mathcal{U}$ et que $\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc

$$\{\text{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$$

. Prenons $x \in \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$. Il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $x = \text{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i}$. Mais $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après 3.b, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $B_{i,i} > 0$. Ainsi $x > 0$. Ceci prouve que $\{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure.

Q 14) Par le calcul explicite de la $\text{Tr}(B\Delta)$ et application de l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient

$$\frac{1}{n} \text{Tr}(B\Delta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \right)^{1/n}$$

ce qui fournit l'inégalité demandée.

Q 15) . Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$. D'après la question 11

$$\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geq \det(B) = 1, \text{ donc } \left(\prod_{i=1}^n b_{i,i} \right)^{1/n} \geq 1$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\text{Tr}(B\Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} = n(\det(S))^{1/n}$$

Q 16) Ainsi $n(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, or la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc $m \geq n(\det(S))^{1/n}$.

Or $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et De plus $\det(D) = \prod_{i=1}^n \mu_i = \frac{\det(S)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1$, donc $D \in \mathcal{U}$. Or $\text{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i = n(\det(S))^{1/n}$, donc $m = n(\det(S))^{1/n}$.

On a donc démontré ce qu'on appelle **l'inégalité trace-déterminant**

$$\inf_{A \in \mathcal{U}} \text{Tr}(AS) = n(\det(S))^{1/n}.$$

pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Bonus : on peut montrer (avec la CNS d'égalité dans l'IAG et dans Hadamard) que le minimum est atteint en un unique point.