

D.S. 6 MP : CCINP

Exercice I :

On considère les équations différentielles pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(E) : X'(t) = AX(t) + B(t) \text{ et } (E_0) : X'(t) = AX(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ -te^t \end{pmatrix}$$

dont on va chercher les solutions $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

I.1 On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère l'équation différentielle (E_0) .

- a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A .
- b) En déduire un système fondamental de solutions, puis la solution générale complexe de (E_0) .

I.2 On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère l'équation $(E) : X'(t) = AX(t) + B(t)$.

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$.

- a) Écrire le système d'équations différentielles linéaires scalaires vérifié par les quatre fonctions $x_k(t)$ et en trouver une solution particulière (on pourra déterminer successivement $x_2(t)$, puis $x_3(t)$, puis $x_1(t)$ et $x_4(t)$).
- b) Déterminer la solution générale réelle de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$
- c) Préciser la solution X de (E) telle que $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice II : a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.1 Donner la dimension des espaces vectoriels S^+ et S^- .

II.2 On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle J . Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.

II.3 Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E) : x^2 y'' + xy' = 0.$$

Déterminer S^+ et S^- . Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S .

II.4 Dans cette question $(E) : x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$.

Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel). En déduire S^+ puis S^- . Déterminer S et donner la dimension de S . On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

Problème :

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle \mid \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ associée. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle s(x) \mid y \rangle = \langle x \mid s(y) \rangle.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \dots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

Objectif du problème : On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \text{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Questions préliminaires ;

- Q 1)** a) Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.
 b) Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ?
- Q 2)** Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, ε_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i . Pour tout vecteur x de E , on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x) \mid x \rangle$$

- a) Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β .
 b) En déduire l'inclusion : $R_s(S(0, 1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0, 1)$ désigne la sphère unité de E .
- Q 3)** a) On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).
 b) Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.$$

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Q 4)** Démontrer que l'application $M \mapsto M^T M - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Q 5) Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad |a_{i,j}| \leq 1.$$

- Q 6)** En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Q 7) Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \text{Tr}(AS)$.

a) Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \text{Tr}(B\Delta).$$

b) Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, que l'on notera t .

c) Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \text{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t .

Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Q 8) Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n} \text{Tr}(S) \right)^n \quad (*)$$

Q 9) Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = D^\top S D$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\text{Tr}(S_\alpha)$.

Q 10) Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité (*), démontrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

Q 11) Conclure que pour toute matrice symétrique positive S , on a :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i} \quad (\text{inégalité d'Hadamard}).$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega \Delta \Omega^\top$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

Q 12) Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = \Omega^\top A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta).$$

Q 13) Démontrer que $\{\text{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m .

Q 14) Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\text{Tr}(B\Delta) \geq n(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{1/n} (b_{1,1} \dots b_{n,n})^{1/n}.$$

Q 15) En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\text{Tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{1/n}$.

Q 16) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k} (\det(S))^{1/n}$ et $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Déterminer le réel m .

Q 17) Bonus à la maison : avec la CNS d'unicité dans l'I.A.G. montrer que l'inf est atteint en un *unique* point