

Nombre de sites visités par une marche aléatoire

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d -uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est-à-dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas X* , à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min \{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne revient jamais en 0_d , au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k, k \in \{0, \dots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ après n pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $E(N_n)$ de la variable aléatoire N_n .

La partie D est indépendante des parties précédentes.

A. Préliminaires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties C et E.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation

$$(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n,$$

montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Rappeler la formule de Stirling, puis déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c \frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

3. Si α est un élément de $]0, 1[$, montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Si α est un élément de $]1, +\infty[$, montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1) n^{\alpha-1}}.$$

4. Pour $x \in [2, +\infty[$, on pose

$$I(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}.$$

Justifier, pour $x \in [2, +\infty[$, la relation

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}.$$

Établir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(I(x)).$$

En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler, sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $] -1, 1[$.

Justifier la formule :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.$$

B. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d) x^n;$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R = n) x^n.$$

6. Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

Montrer que G est définie et continue sur $[-1, 1]$ et que

$$G(1) = P(R \neq +\infty).$$

7. Si k et n sont des entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$, montrer que

$$P((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = P(R = k) P(S_{n-k} = 0_d).$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^n P(R = k) P(S_{n-k} = 0_d).$$

8. Montrer que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad F(x) = 1 + F(x) G(x).$$

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1^- , en discutant selon la valeur de $P(R \neq +\infty)$.

9. Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

L'élément A de $\mathbb{R}^{+*}$ étant fixé, on montrera qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in]1 - \alpha, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A.$$

10. Montrer que la série $\sum P(S_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $P(R \neq +\infty) = 1$.

11. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$(S_i \notin \{S_k, 0 \leq k \leq i-1\}).$$

Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Y_i = 1) = P(R > i).$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^n P(R > i).$$

12. Conclure que

$$\frac{E(N_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(R = +\infty).$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergeant vers le nombre réel ℓ , alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$. Par ailleurs, p est un élément de $]0, 1[$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = -1) = q.$$

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P(S_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité :

$$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (pq)^n.$$

14. Pour $x \in]-1, 1[$, donner une expression simple de $G(x)$.

Exprimer $P(R = +\infty)$ en fonction de $|p - q|$.

Déterminer la loi de R .

15. On suppose que

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

Donner un équivalent simple de $P(R = 2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent simple de $E(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Un résultat asymptotique

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 1.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$B_n = \sum_{k=0}^n b_k.$$

16. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Montrer que

$$a_n \leq \frac{1}{B_n} \quad \text{et} \quad 1 \leq a_n B_{m-n} + a_0 (B_m - B_{m-n}).$$

17. On suppose dans cette question qu'il existe une suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et

$$B_{m_n-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n \quad \text{et} \quad B_{m_n} - B_{m_n-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Montrer que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}.$$

18. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que

$$b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n}.$$

En utilisant la question 17 pour une suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bien choisie, montrer que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{C \ln(n)}.$$

E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdős et Dvoretzky

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$1 = \sum_{k=0}^n P(S_k = 0_d) P(R > n - k).$$

Dans les questions 20 et 21, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par

$$P(X = (0, 1)) = P(X = (0, -1)) = P(X = (1, 0)) = P(X = (-1, 0)) = \frac{1}{4}.$$

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$P(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)^2.$$

21. Donner un équivalent simple de $E(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

FIN DU PROBLÈME