

DM 12 : CCINP MP 2024 solution

Problème

Q1) Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $X^\top AX = 2x^2 + 2xy + y^2$ par calcul du produit matriciel.

Par forme canonique pour la variable y , on a $X^\top AX = x^2 + (x + y)^2$.

Ceci montre bien que $X^\top AX \geq 0$ pour tout $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ et que :

$$X^\top AX = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } x + y = 0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

Donc A est bien définie positive.

Q2) C'est une question de cours : $A \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

Q3) On calcule $P'(X) = 3X^2 - 12X + 9$ qui s'annule en 1 et 3.

Ainsi avec le tableau de variation P' est (strictement chaque fois) croissante sur $] -\infty, 1]$, décroissante sur $[1, 3]$, et croissante sur $[3, +\infty[$.

Comme $P(1) = 1$ et $P(3) = -3$ et bien sûr avec les limites en $\pm\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction continue P sur chaque de ces trois intervalles donne un zéro de P dans les trois intervalles ouverts.

Donc P admet bien trois racines réelles.

Pour la matrice B de l'énoncé, on calcule $\chi_B(X)$ et on s'émerveille de trouver que $\chi_B(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$.

On précise que $\chi_B(0) = -3$ donc la plus petite des trois racines de $\chi_B = P$ est dans $]0, 1[$.

Ainsi les trois valeurs propres de B sont strictement positives, et par la Q2, on conclut que la matrice symétrique B est définie positive.

Q4) Comme une matrice symétrique réelle a toutes ses valeurs propres réelles, sa trace (resp. son déterminant) est la somme (resp. le produit) de ses valeurs propres. Ce qui donne la stricte positivité.

Q5) On note λ_1, λ_2 les deux valeurs propres de M (non nécessairement distinctes).

Pour montrer que M est définie positive, il suffit par la Q2 de montrer que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Or $\det(M) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.

Et comme $\text{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$, on conclut bien que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Q6) Soit $M = \text{diag}(3, -1, -1)$ (qui est bien symétrique!)

On a $\text{Tr}(M) = 1 > 0$ et $\det(M) = 3 > 0$. Mais M n'est pas définie positive puisqu'elle admet une valeur propre négative.

Q7) On sait que si f admet un extremum local en un point (x, y) de l'ouvert $U = (\mathbb{R}^{++})^2$, ce point est un point critique de f .

$$\text{Or } \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{yx^2} \\ 1 - \frac{1}{xy^2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2y = xy^2 = 1 \Leftrightarrow (x^2y = 1 \text{ et } x^2y = xy^2).$$

$$\text{Donc comme } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0, \nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x = y \text{ et } x^3 = 1).$$

Finalement f admet $(1, 1)$ comme seul point critique.

$$\text{On calcule la matrice hessienne de } f \text{ en chaque } (x, y) \in U : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3y} & \frac{1}{x^2y^2} \\ \frac{1}{x^2y^2} & \frac{2}{xy^3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{En particulier } H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{Tr } H_f(1, 1) = 4$ et $\det H_f(1, 1) = 3 > 0$ on conclut par Q12 que la matrice H_f symétrique de taille 2 est définie positive.

D'après le cours, cela suffit pour conclure qu'en ce point critique, la fonction f admet un minimum local.

Q8) Remarque très utile pour la suite :

Pour $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on calcule immédiatement que :

$$X^\top M X = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} m_{i,j} x_i x_j$$

Soit X_k comme dans l'énoncé et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$.

$$\text{Alors } X^\top M X = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,k \rrbracket^2} m_{i,j} x_i x_j = X_k^\top M_k X_k.$$

Erreur d'énoncé : L'énoncé demande que X ne soit pas la colonne nulle. Mais si $X_k = 0$, on a $X_k^\top M_k X_k = 0$ et donc on doit avoir $X^\top M X = 0$. Or si M est définie positive, la seule solution est la colonne $X = 0$.

L'énoncé voulait sûrement dire que si $X_k \neq 0$ alors $X \neq 0$ ce qui est utile à la question suivante.

Q9) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $M \in S_n(\mathbb{R})$ définie positive.

Soit $X_k \neq 0$ quelconque dans $M_{k,1}(\mathbb{R})$ alors $X_k^\top M X_k = X^\top M X$ avec $X \neq 0$ définie Q8). Comme M est définie positive on sait que $X^\top M X > 0$, on conclut donc que $X_k^\top M X_k > 0$.

Ceci montre bien que M_k est définie positive et par la Q4 on conclut que $\det(M_k) > 0$.

Q10) Comme M_{n-1} est inversible (puisque de déterminant strictement positif), on peut définir $V = -M_{n-1}^{-1}U$ qui vérifie bien $M_{n-1}V + U = 0$.

On calcule ensuite par produit par bloc :

$$Q^\top M = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ V^\top M_{n-1} + U^\top & V^\top U + \alpha \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$Q^\top M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ V^\top M_{n-1} + U^\top & V^\top U + \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & M_{n-1}V + U \\ V^\top M_{n-1} + U^\top & V^\top M_{n-1}V + U^\top V + V^\top U + \alpha \end{pmatrix}$$

Par construction de V , on a $M_{n-1}V + U = 0$ et en transposant, comme M_{n-1} est symétrique, $V^\top M_{n-1} + U^\top = 0$.

Ceci montre que $Q^\top M Q$ s'écrit bien sous la forme $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ cherchée.

Reste à justifier que $\beta > 0$. Mais $\det(Q^\top M Q) = \det(Q)^2 \det(M)$ et $\det(Q) = 1$ en fait (matrice triangulaire supérieure avec une diagonale de 1).

$$\text{Donc } \det(M) = \det \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \beta \det(M_{n-1}).$$

Comme on sait que $\det(M) > 0$ et $\det(M_{n-1}) > 0$, on conclut que $\beta > 0$.

Q11) La propriété est triviale pour les matrices de taille 1.

Supposons la vraie pour les matrices de taille $n-1$ pour un $n \geq 2$.

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester. On l'écrit comme à la Q10, alors sa matrice M_{n-1} vérifie aussi le critère de Sylvester et par l'hypothèse de récurrence M_{n-1} est donc définie positive.

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = Q^{-1}X$ donc $X = QY$.

Alors

$$X^\top M X = Y^\top Q^\top M Q Y = Y^\top \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Y = Y_{n-1}^\top M_{n-1} Y_{n-1} + \beta y_n^2 \quad (*)$$

$$\text{où l'on a noté } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } Y_{n-1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $X \neq 0$, on a $Y \neq 0$ donc $Y_{n-1} \neq 0$ ou $y_n \neq 0$.

Donc dans (*) les deux termes $Y_{n-1}^\top M_{n-1} Y_{n-1} + \beta y_n^2$ sont positifs et au moins l'un des deux est non nul (car $\beta > 0$ et M_{n-1} définie positive).

Ceci montre que $X^\top M X > 0$ et donc M est définie positive. La récurrence est établie.

Q12) Pour $C(x)$ de l'énoncé, les deux premiers mineurs principaux sont 2 et $2 \times 1 - 1 = 1 > 0$.

Donc par Sylvester, $C(x)$ est définie positive si, et seulement si, $\det(C(x)) > 0$.

Or par opération sur les colonnes par exemple, $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2$ puis développement, on calcule $\det(C(x)) = 1 - 2x^2$

Donc $\det(C(x)) > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1/2 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Q13) Le troisième mineur principal vaut -7 donc la matrice n'est pas définie positive.

Q14) Par la remarque faite au début de la Q8, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = X^\top A X$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule alors les mineurs principaux de A qui valent 4, 3, 3/4 tous strictement positifs.

Donc A est définie positive, ce qui prouve bien l'inégalité demandée.

Q15) Notons $\Delta_n = \det(S_n)$.

En développant Δ_n par rapport à une ligne, puis en recommençant, on trouve la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 3, \quad \Delta_n = \sqrt{3}\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}. \quad (\dagger)$$

Cependant, comme $\Delta_1 = \sqrt{3}$ et $\Delta_2 = 2$, en posant $\Delta_0 = 1$, la relation $(\dagger)$ est valide pour $n = 2$ aussi.

Pour les suites récurrentes linéaires définies par $(\dagger)$, on considère l'équation caractéristique :

$$r^2 = \sqrt{3}r - 1$$

dont les solutions sont $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i) = e^{\pm i\pi/6}$.

Le cours dit alors qu'il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_n = \lambda \cos(n\pi/6) + \mu \sin(n\pi/6)$$

Avec $\Delta_0 = 1$, on a $\lambda = 1$.

Avec $\Delta_1 = \sqrt{3}$, on obtient $\mu = \sqrt{3}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_n = \cos(n\pi/6) + \sqrt{3}\sin(n\pi/6) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(n\pi/6) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(n\pi/6)\right) = 2\sin\left((n+1)\frac{\pi}{6}\right)$$

Cette expression montre que la suite (Δ_n) est périodique de période 12.

En outre $0 < \frac{(n+1)\pi}{6} < \pi$ si, et seulement si $0 < n+1 < 6$ ssi $n \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.

Ainsi $\Delta_n > 0$ pour $n \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$, donc S_n est définie positive pour $n \leq 4$.

Mais $\Delta_5 = 0$ donc pour tout $n \geq 5$, S_n n'est pas définie positive.