

D.M. 11-5 : dém du thme de Cauchy-Lipschitz linéaire

Partie I :

1) Par déf.

$$|||A||| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \sup_{\|X\|\leq 1} \|AX\| = \sup_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

La dernière définition équivaut encore, par linéarité à dire que $|||A|||$ est le plus petit rapport de Lipschitz de $X \mapsto AX$.

2) Par récurrence sur n :

- Φ_0 est bien définie et de classe C^1 (fonction constante).
- supposons que pour un $n \geq 0$ Φ_n est bien définie et de classe C^1 . Alors Φ_n est en particulier continue, ainsi par hypothèse que A et B . Il en résulte que la fonction $s \mapsto A(s).\Phi_n(s) + B(s)$ est aussi continue sur I .
Ainsi Φ_{n+1} est donc bien définie et, par théorème sur fondamental sur le lien intégrale/primitive pour les fonctions continues Φ_{n+1} est de classe C^1 .

La récurrence est établie.

3. a) Les fonctions A et $\Phi_1 - \Phi_0$ sont continues, donc bornées sur le segment $[\alpha, \beta]$, d'o l'existence de μ et M .

b) La linéarité de l'intégrale et de $A(s)$ donnent

$$\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t) = \int_{t_0}^t A(s) (\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)) ds.$$

Ensuite, d'après l'inégalité triangulaire sur les intégrales et la déf. de la norme subordonnée rappelée au 1) :

$$\|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\| \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} \|A(s) (\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s))\| ds \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |||A(s)||| \cdot \|\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\| ds.$$

$$\text{Enfin, } \|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\| \leq \mu \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} \|\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\| ds \text{ puisque } [\min(t_0, t), \max(t_0, t)] \subset [\alpha, \beta].$$

c) Preuve facile par récurrence sur n , en utilisant l'inégalité du b).

N.B. : l'hypothèse de récurrence s'applique tout $s \in [\min(t_0, t), \max(t_0, t)]$ car ce segment est inclus dans $[\alpha, \beta]$.

4. a) Avec les notations du 3. on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [\alpha, \beta], \|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\| \leq \frac{M\mu^n(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

majorant qui est le terme général d'une série (exponentielle) convergente indépendante de t . Ainsi la série $\sum (\Phi_{n+1} - \Phi_n)$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de I qui contient t_0 . Comme tout segment de I est inclus dans un segment de I contenant t_0 , $\sum (\Phi_{n+1} - \Phi_n)$ converge uniformément sur tout segment de I .

Par lien suites-séries (sommes télescopiques), la suite (Φ_n) converge uniformément sur tout segment de I .

4.b) Pour $t \in I$ posons $\Psi(t) = A(t).\Phi(t) + b(t)$. Par linéarité de la multiplication par $A(t)$,

$$\Psi_n(t) - \Psi(t) = A(t) (\Phi_n(t) - \Phi(t)).$$

On fixe un segment $[\alpha, \beta]$ de I et on définit μ comme au 3.a). Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|\Phi_n(t) - \Phi(t)\|$. Selon a), la suite (ε_n) converge vers 0.

Pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\|\Psi_n(t) - \Psi(t)\| = \|A(t) (\Phi_n(t) - \Phi(t))\| \leq |||A(t)||| \|\Phi_n(t) - \Phi(t)\| \leq \mu \varepsilon_n$$

Le majorant tend vers 0 et ne dépend pas de t . La suite (Ψ_n) converge donc vers Ψ uniformément sur tout segment de I .

c) Fixons $t \in I$. Par définition de Φ_n et Ψ_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t \Psi_n(s) ds.$$

Par passage aux limites, a) et b) donnent

$$\Phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^t \Psi(s) ds = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\Phi(s) + b(s)) ds.$$

Cela signifie exactement que Φ est solution du problème de Cauchy $((E), (t_0, X_0))$ (ici écrit sous forme intégrale), cf 1) b).

5. a) Δ est de classe C^1 car X_1 et X_2 le sont et $\Delta(t_0) = 0$; par conséquent :

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \int_{t_0}^t \Delta'(s) ds = \int_{t_0}^t (X_1'(s) - X_2'(s)) ds \\ &= \int_{t_0}^t A(s) \cdot (\Delta(s)) ds \text{ puisque } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont solutions de } (E). \end{aligned}$$

b) On reproduit pratiquement la preuve de 3. b) et c).

— on montre d'abord comme en 3.b) :

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \|\Delta(t)\| \leq \mu \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} \|\Delta(s)\| ds$$

— on prouve ensuite comme en 3.c) l'inégalité demandée par récurrence sur n en majorant dans l'intégrale $\|\Delta(s)\|$ l'aide de l'hypothèse de récurrence.

c) Le membre de droite de l'ingalité du b) tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Le passage la limite donne donc $\Delta(t) = 0$, c'est-à-dire $X_1(t) = X_2(t)$, pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Cela étant valable pour tout segment $[\alpha, \beta]$ contenant t_0 , on conclut que $X_1 = X_2$.

On a ainsi démontré l'existence d'une solution à un problème de Cauchy au 4. et son unicité au 5.