





**Q 12.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Si  $P \in \text{Ker}(\varphi)$ , on note  $n = \text{deg}(P)$ . On a alors  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , et on peut écrire  $\varphi_n(P) = \varphi(P) = 0$ , donc  $P \in \text{Ker}(\varphi_n)$ .

Par les questions précédentes,  $P$  est un multiple de  $X^m$  où  $m$  est une racine entière de (1). Il y a ainsi 3 solutions possibles (l'éq (1) est du 2nd degré donc possède au maximum 2 racines !!!) :

- L'équation (1) possède deux racines distinctes ENTIÈRES (dans  $\mathbb{N}$ ) :  $m_1$  et  $m_2$ , et alors  $\text{Ker}(\varphi_n) = \text{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$ , de dimension 2.
- L'équation (1) possède une unique racines ENTIÈRE (dans  $\mathbb{N}$ ) :  $m$ , et alors  $\text{Ker}(\varphi_n) = \text{Vect}(X^m)$ , de dimension 1.
- L'équation (1) ne possède aucune racines ENTIÈRE (dans  $\mathbb{N}$ ), et alors  $\text{Ker}(\varphi_n) = \{0\}$ , de dimension 0.

Dans tous les cas, la dimension du noyau de  $\varphi$  est le nombre de racines dans  $\mathbb{N}$  de l'équation (1).

**Q 13.** Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2, linéaire et homogène, dont les coefficients sont des fonctions continues, et le coefficient de  $y''$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$ .

L'ensemble des solutions est alors un sous-espace vectoriel de dimension 2 des fonctions 2 fois dérivables sur  $I = ]0, +\infty[$ .

La réponse est la même en remplaçant partout  $I$  par  $J$ .

**Q 14.** Soit  $y$  une solution de (2) sur  $I$ . Alors comme  $\exp$  est deux fois dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $I$ , la fonction  $g = y \circ \exp$  est deux fois dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Par dérivée de fonctions composées (et de produits pour la dérivée seconde), on a en outre  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$g'(t) = e^t \cdot y'(e^t) \quad (*) \quad \text{et} \quad g''(t) = e^t \cdot y'(e^t) + e^t \cdot e^t \cdot y''(e^t) = e^t \cdot y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) \quad (**)$$

(je fais exprès d'écrire  $(e^t)^2$  qui correspondra à  $x^2$ , au lieu d'écrire  $e^{2t}$ ...)

Par hypothèse,  $y$  solution de (2) sur  $I$  signifie  $y$  deux fois dérivable sur  $I$  (je l'ai déjà utilisé ci-dessus) et

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0.$$

En remplaçant  $x$  par  $e^t \in I$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (e^t)^2 y''(e^t) + ae^t y'(e^t) + by(e^t) = 0 \quad (***)$$

En remplaçant à l'aide de (\*) et de (\*\*) on a alors  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) &= e^t \cdot y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) + (a-1)e^t \cdot y'(e^t) + by(e^t) \\ &= (e^t)^2 y''(e^t) + ae^t y'(e^t) + by(e^t) = 0 \text{ d'après (***)} \end{aligned}$$

donc  $g$  est bien solution de (3).

**Q 15.** Il faut faire le travail dans l'autre sens... en dérivant deux fois  $y = g \circ \ln$ ... je ne le tape pas.

Une autre possibilité est d'utiliser les résultats de structure !

L'ensemble des solutions de (3) sur  $\mathbb{R}$  est un e.v. de dimension 2.

L'application  $\Psi$  qui à  $y$  associe  $y \circ \exp$  est un isomorphisme de l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur  $I$  vers l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Mais l'image par  $\Psi$  de l'ensemble des solutions de (2) sur  $I$  est contenu dans l'ensemble des solutions de (3) sur  $\mathbb{R}$  d'après Q14. On a ainsi une inclusion entre 2 espaces de dimension 2, donc une égalité ! :  $y$  solution de (2) sur  $I \iff y \circ \exp$  solution de (3) sur  $\mathbb{R}$ . Le sens ( $\Leftarrow$ ) donne le résultat de Q15.

**Q 16.** Traitons donc les 2 cas :

- Cas  $a = 3$  et  $b = 1$ .

L'équation (3) est alors  $u'' + 2u' + u = 0$ , d'équation caractéristique associée  $r^2 + 2r + 1 = 0$ . On constate que  $r = -1$  est racine double de l'équation, la solution générale de (3) est alors

$$g(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t} \quad ((A, B) \in \mathbb{R}^2)$$

Par l'équivalence des questions 14-15, la solution générale de (2) sur  $I$  est alors

$$y(x) = g(\ln x) = Ae^{-\ln x} + B(\ln x)e^{-\ln x} = A \cdot \frac{1}{x} + B \cdot \frac{\ln x}{x} \quad ((A, B) \in \mathbb{R}^2)$$

- Cas  $a = 1$  et  $b = 4$ .

L'équation (3) est alors  $u'' + 0u' + 4u = 0$ , d'équation caractéristique associée  $r^2 + 4 = 0$ , de racines  $r_1 = 2i$  et  $r_2 = -2i$ . La solution générale de (3) est alors

$$g(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t) \quad ((A, B) \in \mathbb{R}^2)$$

Par l'équivalence des questions 14-15, la solution générale de (2) sur  $I$  est alors

$$y(x) = g(\ln x) = A \cos(2 \ln x) + B \sin(2 \ln x) \quad ((A, B) \in \mathbb{R}^2)$$

- Q 17.** Comme Q14 en prenant garde au  $-$ ... On note que (heureusement !) pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $-\exp(t) \in J$ ... Et comme dans Q15, on montrerait que réciproquement, si  $g$  solution de (3) sur  $\mathbb{R}$ , alors  $y(x) = g(\ln(-x))$  solution de (2) sur  $J$ ...

- Q 18.** On effectue la résolution séparément sur  $I$  et sur  $J$ , puis on effectuera le "recollement" :

- Résolution sur  $I$ . On commence (comme dans Q16) en résolvant (3) pour  $a = 1$  et  $b = -4$  : L'équation (3) est alors  $u'' + 0u' - 4u = 0$ , d'équation caractéristique associée  $r^2 - 4 = 0$ , de racines  $r_1 = 2$  et  $r_2 = -2$ . La solution générale de (3) est alors

$$g(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} \quad ((A, B) \in \mathbb{R}^2)$$

Par l'équivalence des questions 14-15, la solution générale de (2) sur  $I$  est alors

$$y(x) = g(\ln x) = Ae^{2 \ln x} + Be^{-2 \ln x} = Ax^2 + B \cdot \frac{1}{x^2} \quad ((A, B) \in \mathbb{R}^2)$$

- Résolution sur  $J$ . Par Q17, on effectue la résolution de (3) sur  $\mathbb{R}$ . C'est d'ailleurs la même que sur  $I$ , la solution générale de (3) est alors

$$g(t) = Ce^{2t} + De^{-2t} \quad ((C, D) \in \mathbb{R}^2)$$

Par l'équivalence de Q17, la solution générale de (2) sur  $J$  est alors

$$y(x) = g(\ln(-x)) = Ce^{2 \ln(-x)} + De^{-2 \ln(-x)} = C(-x)^2 + D \cdot \frac{1}{(-x)^2} = Cx^2 + D \cdot \frac{1}{x^2} \quad ((C, D) \in \mathbb{R}^2)$$

(ANALYSE) Soit  $y$  une solution de (2) de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $y$  sera solution de (2) sur  $I$  et sur  $J$  donc par ce qui précède il existe  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$  tq

$$y(x) = \begin{cases} Ax^2 + B \cdot \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ Cx^2 + D \cdot \frac{1}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Mais  $y$  est continue en 0, donc notamment  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = y(0)$ . En multipliant par  $x^2$  (qui tend vers 0) on en déduit

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (Ax^4 + B) = B,$$

donc  $B = 0$ .

De même,  $D = 0$ , en regardant la même limite en  $0^-$ . On peut maintenant affirmer qu'il existe  $A$  et  $C$  tq

$$y(x) = \begin{cases} Ax^2 & \text{si } x \geq 0 \\ Cx^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$y'$  possèdera alors une dérivée à droite et à gauche en 0, respectivement égales à  $2A$  et  $2C$ . Ces deux valeurs doivent être égales à  $y''(0)$ , ce qui implique  $C = A$ .

Ainsi, on voit que  $y$  solution de classe  $\mathcal{C}^2$  de (2) sur  $\mathbb{R}$  implique que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = Ax^2$  (où  $A \in \mathbb{R}$ ).

(SYNTHÈSE) Soit  $A \in \mathbb{R}$ , on pose  $(\forall x \in \mathbb{R}) y(x) = Ax^2$ . La fonction  $y$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et on a  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $y'(x) = 2Ax$  et  $y''(x) = 2A$  d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 y''(x) + ax y'(x) + by(x) = 2x^2 + 1.x.2x - 4.x^2 = 0,$$

donc  $y$  est solution de (2) sur  $\mathbb{R}$ .

CONCLUSION : L'ensemble des solutions de (2) de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  est  $\left\{ x \mapsto Ax^2 ; A \in \mathbb{R} \right\}$ .

**Q 19.** Si l'on considère une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres (réels ou) complexes, alors le rayon de convergence de cette série entière est

$$\begin{aligned} R &= \sup \left( \left\{ r \in \mathbb{R}_+ ; \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\} \right) \\ &= \sup \left( \left\{ r \in \mathbb{R}_+ ; \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |a_n r^n| \leq M \right\} \right) \end{aligned}$$

[Une **propriété** est qu'alors, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , si  $|z| < R$  alors  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge (absolument) et que si  $|z| > R$  alors  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  diverge (grossièrement)]

**Q 20.** La fonction somme  $J_0$  sera de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - R, R[$  et on a  $\forall x \in ] - R, R[$ ,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \\ J_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}, \\ J_0''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

En multipliant  $J_0'(x)$  par  $x$  et  $J_0''(x)$  par  $x^2$  on obtient les expressions suivantes (qui apparaissent dans l'équation (4)) :  $\forall x \in ] - R, R[$ ,

$$\begin{aligned} x J_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^n, \\ x^2 J_0''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^n. \end{aligned}$$

Noter que le terme  $n c_n x^n$  est nul pour  $n = 0$ , et que les termes  $n(n-1) c_n x^n$  sont nuls pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

On pourrait donc faire démarrer la 1ère somme à  $n = 0$  et la 2nde à  $n = 0$  ou  $n = 1 \dots$  c'est ce que l'on fait fréquemment...

Mais ici, le terme en  $J_0(x)$  commence par  $c_0 x^0 = 1$ , donc la quantité  $x^2 J_0(x)$  ne fait apparaître que des puissances supérieures (ou égales) à 2.

On va donc "au contraire" faire démarrer toutes les sommes à la puissance 2, en écrivant si nécessaire les termes en plus en dehors.

On écrit donc (avec un décalage d'indice  $n = k + 2$  pour la 1ère série)  $\forall x \in ] - R, R[$ ,

$$\begin{aligned} x^2 J_0(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} x^n, \\ x J_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^n = c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n c_n x^n, \\ x^2 J_0''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^n. \end{aligned}$$

Le fait que  $J_0$  est solution de (4) sur  $] - R, R[$  signifie alors que  $\forall x \in ] - R, R[$ ,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^n + c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n c_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} x^n = 0,$$

ou encore en regroupant les 3 séries en une seule que  $\forall x \in ] - R, R[$ ,

$$c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1) c_n + n c_n + c_{n-2}) x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (l'égalité ayant lieu sur  $] - R, R[$  pour  $R > 0$ ) on en déduit :

- Identification du coefficient de  $x^1 = x$  :  $c_1 = 0$ ,
- Identification du coefficient de  $x^n$  (pour  $n \geq 2$ ) :  $\forall n \geq 2, n(n-1)c_n + nc_n + c_{n-2} = 0$ .  
Le coeff de  $c_n$  est  $n(n-1) + n = n^2 \neq 0$  pour  $n \geq 2$  donc cette relation peut s'écrire

$$\forall n \geq 2, \quad c_n = \frac{-c_{n-2}}{n^2} \quad (*)$$

En partant de  $c_1 = 0$ , la relation de récurrence (\*) donne (avec  $n = 3$ )  $c_3 = 0$ , puis (avec  $n = 5$ )  $c_5 = 0$ .

Il faudrait rédiger la récurrence (je ne le fais pas) on trouve aisément  $\forall k \in \mathbb{N}, c_{2k+1} = 0$ .

Quant à la valeur de  $c_{2k}$ , on ne nous demande pas de la trouver. Comme on nous la donne, on la vérifie par récurrence. Je note donc (pour  $k \in \mathbb{N}$ )  $H_k$  la propriété  $c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}$ . Démontrons donc cette propriété par récurrence.

Initialisation : Pour  $k = 0$ , on a  $\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2} = \frac{1}{1.1^2} = 1$  et  $c_0 = 1$  par hypothèse de l'énoncé, donc la propriété  $H_0$  est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain entier  $k \in \mathbb{N}$ .

On utilise alors la relation (\*) avec  $n = 2k + 2 = 2(k + 1) \geq 2$ , ce qui donne

$$c_{2(k+1)} = \frac{-c_{2k}}{(2(k+1))^2} = \frac{(-1) \cdot (-1)^k}{4(k+1)^2 \cdot 4^k(k!)^2}.$$

Puisque  $4 \cdot 4^k = 4^{k+1}$  et  $(k+1)^2(k!)^2 = ((k+1)k!)^2 = (k+1)^2$  on obtient

$$c_{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1} \cdot ((k+1)!)^2},$$

et la propriété est prouvée au rang  $k + 1$ .

Ainsi, le résultat est bien démontré par récurrence.

**Q 21.** Les coefficients d'indices impairs étant nuls, on a  $J_0(x) = \sum_{k \geq 0} c_{2k} x^{2k} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2} x^{2k}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . Je note  $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2} x^{2k} \neq 0$ , et on a  $\forall k$ ,

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{|x|^{2k+2}}{|x|^{2k}} \cdot \left| \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} \right| = |x^2| \cdot \frac{1}{(2k+2)^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 < 1,$$

donc (règle de d'Alembert) la série  $\sum_{k \geq 0} u_k$  converge absolument pour tout réel  $x$  (la CV est évidente en  $x = 0$ ).

Le rayon de CV de la série entière est donc  $R = +\infty$ .

**Q 22.** La fonction  $J_0$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$ . Si  $(J_0, f)$  est liée dans l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, r[$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tq  $f = \lambda J_0$  sur  $]0, r[$  ( $J_0(0) = c_0 = 1$  donc par continuité,  $J_0$  ne peut être nulle sur  $]0, r[$ ). La fonction  $J_0$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ , elle est bornée sur le segment  $[0, r]$ , donc sur  $]0, r[$ . Il en est donc de même de  $f$ .

**Q 23.** Si  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est solution, alors par produit de Cauchy, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tq  $|x| < R_0 = \min(R_\alpha, R_\beta)$  :

$$\left( \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k x^k$$

où (résultat sur les produits de Cauchy)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}$$

La fonction série entière  $\sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k x^k$  est constante égale à 1 sur  $] -R, R[$  ssi  $\gamma_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \gamma_n = 0$ .

Puisque  $\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0 = \beta_0$  (hyp  $\alpha_0 = 1$ ) on retrouve exactement les relations (5).

**Q 24.** Il suffit de se rappeler Q19 ! Si  $r < R_\alpha$ , la suite  $(\alpha_n r^n)$  est bornée  
(OU : si  $r < R_\alpha$ , la série  $\sum \alpha_n r^n$  CV absolument, donc CV ; alors, son terme général  $(\alpha_n r^n)$  tend vers 0, donc est borné).

On a bien l'existence de  $M > 0$  tq  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|\alpha_n r^n| \leq M$ , d'où le résultat en divisant par  $r^n > 0$ .

**Q 25.** On a en fait un système "triangulaire" (certes infini), mais : la 1ère égalité donne  $\beta_0$ , puis l'égalité suivante donne pour  $n = 1$  :  $\alpha_0 \beta_1$  en fonction de  $\beta_0$ , on en déduit  $\beta_1$  car  $\alpha_0 \neq 0$ , puis l'égalité donne pour  $n = 2$  :  $\alpha_0 \beta_1$  en fonction de  $\beta_0$  et  $\beta_1$ , on en déduit  $\beta_2$  car  $\alpha_0 \neq 0$ , et ainsi de suite.

Pour rédiger, on va montrer par récurrence FORTE que (pour tout  $n$ )  $\beta_n$  est défini de manière unique, et vérifie l'inégalité (sauf pour  $n = 0$ )...

- Pour  $n = 0$ , la 1ère égalité de (5) impose une unique solution, qui est  $\beta_0 = 1$ .
- Pour  $n = 1$ , la 2ème égalité de (5) implique (puisque  $\alpha_0 = 1$ )  $\beta_1 = -\alpha_1 \beta_0 = -\alpha_1$  (d'où l'existence et l'unicité), puis d'après Q24  $|\beta_1| = |\alpha_1| \leq \frac{M}{r} = \frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1}$ , donc l'inégalité est respectée.
- Hérité : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on suppose  $\beta_0, \dots, \beta_n$  définis de manière unique et  $\beta_1, \dots, \beta_n$  vérifiant l'inégalité... Alors la 2nde inégalité de (5) pour la valeur de  $n + 1$  implique (puisque  $\alpha_0 = 1$ ) :

$$\beta_{n+1} = -\alpha_1 \beta_n - \alpha_2 \beta_{n-1} \dots - \alpha_n \beta_1 - \alpha_{n+1} \beta_0$$

On a déjà existence et unicité de  $\beta_{n+1}$ . On peut ensuite le majorer par inégalité triangulaire, puis en utilisant Q24 pour majorer les  $\alpha_{\dots}$  et l'hypothèse de récurrence pour majorer les  $\beta_{\dots}$ , en traitant à part le cas de  $\beta_0 = 1$ .

On a ainsi

$$\begin{aligned} |\beta_{n+1}| &\leq |\alpha_1| \cdot |\beta_n| + |\alpha_2| \cdot |\beta_{n-1}| + \dots + |\alpha_n| \cdot |\beta_1| + |\alpha_{n+1}| \cdot 1 \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{r^k} \cdot \frac{M(M+1)^{(n+1)-k-1}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}} \\ &\leq \frac{M}{r^{n+1}} \left( 1 + \sum_{k=1}^n M(M+1)^{n-k} \right) \quad (*) \end{aligned}$$

On a une somme de termes d'une suite géométrique de raison  $M + 1 \neq 1$ , donc on peut la calculer (en posant  $i = n - k$ ) :

$$\sum_{k=1}^n M(M+1)^{n-k} = M \sum_{j=0}^{n-1} (M+1)^j = M \frac{(M+1)^n - 1}{M+1-1} = (M+1)^n - 1$$

En "réinjectant" dans (\*) il vient

$$|\beta_{n+1}| \leq \frac{M}{r^{n+1}} (1 + (M+1)^n - 1) = \frac{M(M+1)^{n+1-1}}{r^{n+1}},$$

donc la propriété est vérifiée au rang  $n + 1$ .

L'existence et l'unicité de la suite vérifiant (5) est ainsi démontrée, ainsi que les inégalités demandées.

**Q 26.** Si on note  $\rho = \frac{r}{M+1} > 0$ , on a d'après Q25

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\beta_k \rho^k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} \cdot \frac{r^k}{(M+1)^k} = \frac{M}{M+1} = c^{ste},$$

donc la suite  $(\beta_k \rho^k)$  est bornée.

On en déduit (cf Q19) que le rayon de CV de  $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$  vérifie  $R_\beta \geq \rho > 0$ .

**Q 27.** Si  $\lambda$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, r[$  il en sera de même de  $y$ , et l'on aura  $\forall x \in ]0, r[$ ,

$$y'(x) = \lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = \lambda''(x)J_0(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x).$$

Ainsi,  $y$  sol de (4) sur  $]0, r[$  si et seulement si  $\forall x \in ]0, r[$ ,

$$x^2(\lambda''(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x)) + x(\lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x)) + x^2\lambda(x)J_0(x) = 0,$$

et l'on peut regrouper les termes en mettant  $\lambda$ ,  $\lambda'$  et  $\lambda''$  en facteur, i.e.  $y$  sol de (4) sur  $]0, r[$  si et seulement si  $\forall x \in ]0, r[$ ,

$$x^2 \lambda''(x) J_0(x) + \lambda'(x) [2x^2 J_0'(x) + x J_0(x)] + \lambda(x) [x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x)] = 0.$$

Le terme  $x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x)$  est nul (puisque  $J_0$  est solution de (4), donc  $y$  sol de (4) sur  $]0, r[$  si et seulement si  $\forall x \in ]0, r[$ ,

$$x^2 \lambda''(x) J_0(x) + \lambda'(x) [2x^2 J_0'(x) + x J_0(x)] = 0 \quad (*)$$

Par ailleurs, si on note  $\psi : x \mapsto x J_0^2(x) \lambda'(x)$ , alors la fonction  $\psi$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, r[$ , et alors  $\psi$  est constante sur  $]0, r[$  si et seulement si  $\forall x \in ]0, r[$ ,  $\psi'(x) = 0$ , i.e. ssi  $\forall x \in ]0, r[$ ,

$$J_0^2(x) \lambda'(x) + 2x J_0'(x) J_0(x) \lambda'(x) + x J_0^2(x) \lambda''(x) = 0 \quad (**)$$

Les équations (\*) et (\*\*) sont proportionnelles (rapport  $J_0(x)/x$ ) donc équivalentes entre elles, et on a le résultat voulu.

**Q 28.** La fonction  $J_0$  est une série entière de rayon de CV infini, donc par produit de Cauchy de  $J_0$  par elle-même, la fonction  $J_0^2$  est somme d'une série entière, de rayon de CV infini.  
On a  $J_0(0) = c_0 = 1$ , donc  $J_0(0)^2 = 1$ .

**Q 29.** D'après Q27, si l'on prend pour  $\lambda$  une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x J_0^2(x)}$ , alors  $y : x \mapsto \lambda(x) J_0(x)$  sera solution de (4).

En notant  $J_0^2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k$ , de rayon de CV infini, alors par Q23 à Q26, on peut définir  $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k$ , de rayon de CV  $R_\beta > 0$ , tq  $J_0^2 g = 1$  sur  $] -R_\beta, R_\beta[$ . En d'autres termes,  $1/J_0^2$  est DSE au voisinage de 0.

Le coefficient  $\beta_0$  vaut 1, et pour faire apparaître le  $\ln$  on commence en écrivant  $\frac{1}{J_0^2(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^k$  pour tout  $x$  dans  $] -R_\beta, R_\beta[$ , donc *a fortiori* sur  $]0, R_\beta[$ .

On a alors  $\forall x \in ]0, R_\beta[$ ,  $\frac{1}{x J_0^2(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1}$ . En primitivant, on choisit  $\lambda(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$  pour tout  $x \in ]0, R_\beta[$ .

La fonction  $x \mapsto \lambda(x) J_0(x)$  est alors (d'après Q27) une solution de (4).

Cette solution peut s'écrire  $\ln(x) J_0(x) + \eta(x)$ , où  $\eta(x)$  est le produit de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$  et de  $J_0(x)$ .

En tant que produit (par produit de Cauchy) d'une série entière de rayon de CV  $R_\beta$  et d'une série entière de rayon de CV infini,  $\eta$  possède un rayon de CV  $R_\eta \geq R_\beta$ .

Et la solution a la forme demandée.

**Q 30.** Notons  $J_1 : x \mapsto \eta(x) + \ln(x) J_0(x)$  la solution de (4) trouvée Q29.

En tant que série entière,  $\eta(x) \rightarrow \eta(0)$  quand  $x \rightarrow 0$ , donc  $\eta$  est bornée au voisinage de 0. En revanche,  $J_0(x) \rightarrow J_0(0) = 1$  donc  $J_0(x) \ln(x) \rightarrow -\infty$ , lorsque  $x \rightarrow 0^+$ .

Ainsi,  $J_1$  n'est PAS bornée sur  $]0, r[$ .

Par Q22, on en déduit que  $(J_0, J_1)$  est une famille libre.

CONCLUSION :  $(J_0, J_1)$  est une famille libre (de 2 élt's !) de l'ensemble des solutions de (4) sur  $]0, R_\eta[$ , et cet ensemble est un e.v. de dimension 2.

Ainsi,  $(J_0, J_1)$  est une base de l'ensemble des solutions.

L'ensemble recherché s'écrit donc  $Vect(J_0, J_1)$ , ou si l'on préfère, la solution générale est  $x \mapsto A J_0(x) + B J_1(x)$ , pour  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

## Problème II

**Q 31.** La variable aléatoire vérifie  $0 \leq |X| \leq 1$ . Puisque 1 (variable aléatoire constante) possède une espérance, on en déduit par comparaison que  $X$  est d'espérance finie.

Ou alors, on détaille plus : si  $X$  est une v.a. (pour variable aléatoire) finie, alors  $X$  possède une espérance.

Sinon, on note  $X(\Omega) = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$  où les  $x_n$  sont les valeurs 2 à 2 différentes prises par  $X$ .

Je note aussi  $p_n = \mathbf{P}(X = x_n)$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ). On sait que  $\sum_{n \geq 0} p_n$  converge (et vaut 1).

L'hypothèse  $X$  à valeurs dans  $[-1, 1]$  signifie que  $\forall n, x_n \in [-1, 1]$ , ou encore  $|x_n| \leq 1$ .

On a donc  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |x_n p_n| \leq p_n$ .