

1) A l'équilibre thermique,  $\varphi_T = I \rightarrow T_0 = \sqrt[4]{\frac{I}{\sigma}} = 2,5 \cdot 10^2 \text{ K}$

Cette température est insuffisante, il faut tenir compte de l'atmosphère et de l'effet de serre.



2) Les équilibres de l'atmosphère et de la Terre impliquent que  $2\varphi_a = \varphi_T$  et  $I + \varphi_a = \varphi_T$ .

Ainsi,  $I = \varphi_a \rightarrow T_a = 2,5 \cdot 10^2 \text{ K}$  et  $T_0 = \sqrt[4]{2} T_a = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$  C'est plus réaliste.

3) L'atmosphère est constituée de 80% de diazote et de 20% de dioxygène  $\rightarrow M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$

4-5) L'équilibre hydrostatique se traduit par  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \mu \vec{g}$ , c'est-à-dire  $\frac{dP}{dz} = -\mu(z)g = -\frac{MgP(z)}{RT(z)}$  (\*)

avec l'axe  $z$  orienté vers le haut. D'après le modèle isentropique,  $\frac{dT}{T(z)} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{dP}{P(z)} = 0$ .

On en déduit que  $\frac{dT}{dz} = -\frac{(\gamma-1)Mg}{\gamma R} \rightarrow T(z) = T_0 - \frac{Mg}{c_p} z$   $\Gamma = -\frac{2Mg}{7R} = -10^{-2} \text{ K.m}^{-1} = -10 \text{ K.km}^{-1}$

6) Toujours d'après le modèle isentropique,  $\frac{dT}{T(z)} = \frac{RdP}{c_p P(z)} \rightarrow T_f = T_i \left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{R/c_p}$

7) Si  $T_f < T(z_i + dz)$ , le système a une masse volumique  $\mu_f = \frac{MP(z_i+dz)}{RT_f} > \frac{MP(z_i+dz)}{RT(z_i+dz)} = \mu_{eq}$  statique.

Le poids l'emporte, la parcelle redescend, l'atmosphère est **stable**.

8) Si  $T_f = T(z_i + dz)$ , la parcelle est à l'équilibre, on s'attend à retrouver le gradient  $\Gamma = -\frac{Mg}{c_p}$ .

Et en effet,  $T(z_i + dz) = T(z_i) \left(\frac{P(z_i) + dP}{P(z_i)}\right)^{R/c_p} \sim T(z_i) \left(1 + \frac{RdP}{c_p P(z_i)}\right) = T(z_i) - \frac{Mg}{c_p} dz$  d'après (\*).

Dans le modèle d'atmosphère isentropique, l'équilibre n'est jamais rompu. D'autre part, il est légitime de considérer les mouvements convectifs comme étant essentiellement adiabatiques car les échanges thermiques sont beaucoup plus lents que les actions mécaniques.

**9)** En s'élevant, la température de la parcelle diminue de  $10 \text{ K.km}^{-1}$ . Dans les hautes couches, le gradient de température est **quasi nul**,  $T_f$  est donc inférieure à  $T(z_i + dz)$ , l'atmosphère est **stable**. Dans les basses couches, le gradient de température vaut environ  $-20 \text{ K.km}^{-1}$ ,  $T_f$  est donc supérieure à  $T(z_i + dz)$ , l'atmosphère est **instable**.

**10)** La partie verticale à gradient de température **nul** correspond à la **stratosphère**. La partie oblique à gradient de température environ égal à  $-7 \text{ K.km}^{-1}$  ( $> -10 \text{ K.km}^{-1}$ ) correspond à la **troposphère**.

**11)** Les conditions propices au changement d'état de la vapeur d'eau en goutte d'eau sont réunies (pression égale à la pression de vapeur saturante, présence de poussières permettant d'abaisser la tension superficielle de l'eau). Lors de la condensation, la chaleur libérée fait **augmenter la température** du système. Ainsi,  $T_f > T(z_i + dz)$  entraînant ainsi la parcelle vers le haut par instabilité convective. Apparaissent alors dans le ciel, **les nuages**.

La réduction du volume du système au cours de la condensation (croissance de  $\mu g$ ) est dominée par l'augmentation de la température (décroissance de  $\mu g$  déterminante).

**12-13)**  $dx_v = \frac{dn_v}{n_a}$  (1)  $\Leftrightarrow n_a C_p \left( \frac{dT}{T} + \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{dP}{P} \right) = -n_a dx_v \Delta_{vap} H$  et  $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg dz}{RT}$

Ainsi, après simplification par  $T$  et réemploi de  $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ , on obtient en effet  $C_p \frac{dT}{dz} + Mg = -\frac{dx_v}{dz} \Delta_{vap} H$

**14-15)** L'intégration de la relation (2) entre  $z = 0$  et  $z = h$  donne

$$-\Delta_{vap} H (0 - x_v^i) = C_p (T(h) - T(0)) + Mgh \rightarrow \Gamma_h = \frac{x_v^i \Delta_{vap} H}{h C_p} - \frac{Mg}{C_p} = -4 \text{ K.km}^{-1}$$

Le phénomène de **condensation atténue le gradient** de température. C'est à l'équateur que l'effet est maximal, ainsi  $\Gamma_h > -7 \text{ K.m}^{-1}$ , le gradient moyen du modèle international standard.

**16)** Au voisinage de l'équateur, le Soleil n'est jamais très éloigné du zénith à midi tout au long de l'année. **Le flux solaire y est en moyenne maximal** donc la température de surface y est supérieure.

A l'équateur, l'air s'élève en formant des nuages de **précipitation**. Quand les parcelles d'air chaud et humide atteignent la limite entre la troposphère et la stratosphère, elles ne peuvent monter plus haut ni ne peuvent rester à cet endroit à cause du flux constant ascendant. Par conséquent, **elles sont repoussées vers le Nord ou le Sud**. Afin de **combler la dépression** créée par l'ascension, elles se dirigent vers le sol puis se déplacent des tropiques vers l'équateur.

$$17) \quad dG_{l,m} = -S_{l,m}dT + V_{l,m}dP \quad dG_{v,m} = -S_{v,m}dT + V_{v,m}dP \quad G = n_v G_{v,m} + (n - n_v)G_{l,m}$$

18) Si  $G$  est un potentiel thermodynamique,  $dG = 0$  à l'équilibre.

De plus, à  $T$  et  $P$  constantes,  $dG_{l,m} = dG_{v,m} = 0$ , donc  $dG = 0 \Leftrightarrow (G_{v,m} - G_{l,m})dn_v = 0 \Leftrightarrow G_{v,m} = G_{l,m}$   
Egalité des potentiels chimiques à l'équilibre liquide-vapeur.

$$19) \quad G_{v,m}(T, P_{sat}(T)) = G_{l,m}(T, P_{sat}(T)) \quad G_{v,m}(T + dT, P_{sat}(T + dT)) = G_{l,m}(T + dT, P_{sat}(T + dT))$$

$$\text{Ainsi, } dG_{v,m} = dG_{l,m} \Leftrightarrow -S_{v,m}dT + V_{v,m}dP_{sat} = -S_{l,m}dT + V_{l,m}dP_{sat}$$

$$\Leftrightarrow (V_{v,m} - V_{l,m})dP_{sat} = (S_{v,m} - S_{l,m})dT \quad \text{Un raisonnement sur une transition réversible à } T \text{ et } P$$

constantes permet de relier l'entropie de vaporisation à l'enthalpie de vaporisation :  $S_{v,m} - S_{l,m} = \frac{\Delta_{vap}H}{T}$

$$\text{En définitive, } \frac{dP_{sat}}{dT} = \frac{\Delta_{vap}H}{T(V_{v,m} - V_{l,m})}$$

$$20) \quad V_{v,m} = \frac{RT}{P_{sat}} \quad \text{On intègre donc l'expression } \frac{dP_{sat}}{P_{sat}} = \frac{\Delta_{vap}H}{RT^2} dT \Leftrightarrow \ln\left(\frac{P_{sat}(T)}{P_{sat}(T_0)}\right) = \frac{\Delta_{vap}H}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$$

21) Les carottages glaciaires permettent de mesurer la fraction de  $H_2O^{18}$  selon la profondeur donc en fonction de la date des précipitations. Or cette fraction est sensible à la température via le rapport  $\frac{P_{sat}^{18}(T)}{P_{sat}^{16}(T)}$ .  
(Lorsque la température augmente, l'évaporation est plus intense et le déséquilibre en faveur de l'oxygène 16 joue moins. Ainsi, une augmentation de la fraction de  $H_2O^{18}$  témoigne d'un réchauffement climatique.)

$$22) \quad \xi = -\frac{W}{Q_c} \quad \text{Avec } -W = Q_c + Q_f \text{ (1er principe) et } \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 \text{ (2nd principe).}$$

$$\text{Dans le cadre du moteur de Carnot, } \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \rightarrow \xi = \xi_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

23)  $W < 0 \quad Q_1 > 0 \quad Q_2 < 0$  D'après le comportement récepteur des résistances thermiques, la chaleur s'écoule dans le sens des températures décroissantes :  $T_c > T_1 > T_2 > T_f$

$$24-25) \quad Q_1 = \frac{\tau(T_c - T_1)}{R_{th}} \quad Q_2 = \frac{\tau(T_f - T_2)}{R_{th}} \quad P = -\frac{W}{2\tau} = \frac{T_c - T_1 + T_f - T_2}{2R_{th}}$$

$$26-27) \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{T_c}{T_1} + \frac{T_f}{T_2} \leq 2 \quad \text{Ainsi, } P = \frac{T_c - T_1 + T_f(X-1)/(2X-1)}{2R_{th}} = \frac{T_c}{2R_{th}} \frac{(X-1)(\eta - 2X + 1)}{2X - 1}$$

$$28) \quad \text{D'après l'inégalité obtenue en Q26, } \frac{1}{X} \leq 2 - \frac{T_f}{T_2}. \text{ Or } \frac{T_f}{T_2} < 1, \text{ donc } 1 < \frac{1}{X} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < X < 1$$

$$29) \frac{df}{dX} = 0 \Leftrightarrow (\eta - 2X + 1 - 2(X - 1))(2X - 1) - 2(X - 1)(\eta - 2X + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2X - 1)^2 = \eta \Leftrightarrow X = X_+ = \frac{1 + \sqrt{\eta}}{2} \quad \text{car} \quad \frac{1}{2} < X. \quad P_{max} = \frac{T_c}{4R_{th}} (1 - \sqrt{\eta})^2$$

$$30) \xi = -\frac{W}{Q_1} = T_c \frac{(X-1)(\eta-2X+1)}{(2X-1)(T_c-T_1)} = \frac{\eta-2X+1}{1-2X} = 1 - \frac{\eta}{2X-1} \quad \text{Et en effet, } \xi(X_+) = 1 - \sqrt{\eta}$$

Comme  $\eta < 1 \Leftrightarrow \eta^2 < \eta \Leftrightarrow \eta < \sqrt{\eta}$ , il est rassurant de trouver que  $\xi(X_+) < 1 - \eta = \xi_c$

**31) La diffusion thermique** à travers les résistances est la principale source d'irréversibilité.

On applique le second principe aux résistances en régime permanent stationnaire. Leur entropie étant

$$\text{constante, } \Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_c} - \frac{Q_1}{T_1} + S_1^c = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_f} - \frac{Q_2}{T_2} + S_2^c = 0. \text{ Ainsi, } \dot{S} = \frac{S_1^c + S_2^c}{2\tau} = \frac{(T_c - T_1)^2}{2R_{th} T_c T_1} + \frac{(T_f - T_2)^2}{2R_{th} T_f T_2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{S} = \frac{(1-X)^2}{2R_{th} X} + \frac{(1-T_2/T_f)^2}{2R_{th} T_2/T_f} = \frac{(1-X)^2}{2R_{th} X} + \frac{(1-T_2/T_f)^2}{2R_{th} T_2/T_f} = \frac{(1-X)^2}{R_{th}(2X-1)}$$

On remarque avec satisfaction qu'il n'y a pas d'entropie créée si  $X = 1$  ( $T_c = T_1$  et  $T_f = T_2$ ) et qu'au

contraire, l'entropie créée 'explose' si  $X \rightarrow \frac{1}{2}$  ( $T_f \ll T_2$ ). A la puissance maximale,  $\dot{S} = \frac{(1-\sqrt{\eta})^2}{4R_{th}\sqrt{\eta}} = \frac{P_{max}}{\sqrt{T_f T_c}}$ .

$$32-33) P = 4\pi r_T^2 I (1 - \sqrt{\eta}) = 1.10^{16} W$$

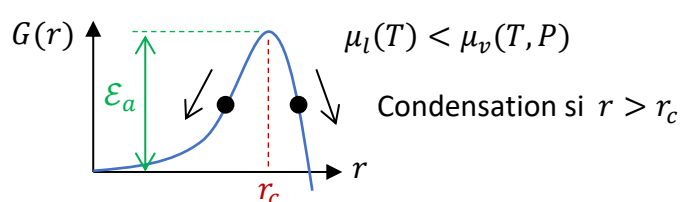
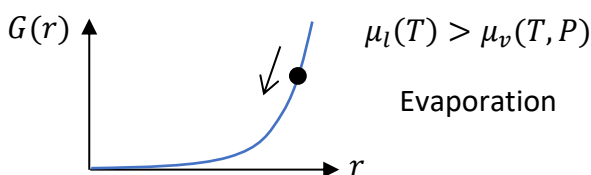
$$\mathcal{M} = 4\pi r_T^2 h \rho \rightarrow U = \sqrt[3]{\frac{P}{0.05 \cdot 4\pi r_T^2 \rho}} = \sqrt[3]{\frac{I(1-\sqrt{\eta})}{0.05 \rho}} = 8 m.s^{-1} \sim 30 km.h^{-1} \quad \text{C'est réaliste.}$$

$$34) \text{ A l'équilibre, } \mu_l(T) = \mu_v(T, P_{sat}(T)) = \mu_v^0(T) + RT \ln\left(\frac{P_{sat}(T)}{p^0}\right).$$

$$35) dG = \sigma dA + \mu_l dn_l + \mu_v dn_v = \sigma dA + (\mu_l(T) - \mu_v(T, P)) dn_l$$

$$36) A = 4\pi r^2 \text{ et } n_l = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3M_{H_2O}} \rightarrow dG = 4\pi r \left( 2\sigma + (\mu_l(T) - \mu_v(T, P)) \frac{\rho_0 r}{M_{H_2O}} \right) dr$$

$$37-38) G(r) = 4\pi\sigma r^2 + \frac{4\pi\rho_0(\mu_l(T) - \mu_v(T, P))r^3}{3M_{H_2O}} \quad r_c = \frac{2\sigma M_{H_2O}}{(\mu_v(T, P) - \mu_l(T))\rho_0} \quad \mathcal{E}_a = \frac{4\pi\sigma}{3} \left( \frac{2\sigma M_{H_2O}}{(\mu_v(T, P) - \mu_l(T))\rho_0} \right)^2$$



Spontanément  $G$  diminue pour essayer d'atteindre sa valeur minimale à l'équilibre. La condensation n'est possible que si la décroissance en " $r^3$ " est plus forte que la croissance de l'énergie de surface en " $r^2$ ".

**39)**  $\mu_v(T, P) = \mu_v^0(T) + RT \ln \left( \frac{P_v}{P^0} \right)$

A la saturation, il y a égalité des potentiels chimiques :

$$\mu_v^0(T) + RT \ln \left( \frac{P_{sat}(T)}{P^0} \right) = \mu_l(T) \quad \text{Ainsi, } r_c = \frac{2\sigma M_{H_2O}}{RT \rho_0 \ln \chi}$$

**40)** Plus l'énergie d'activation est faible plus la vitesse d'apparition des gouttelettes est grande.

Or  $\mathcal{E}_a = \frac{4\pi\sigma}{3} r_c^2 = \frac{16\pi\sigma^3 M_{H_2O}^2}{3(RT\rho_0 \ln \chi)^2}$  A  $T$  fixée, plus la sursaturation est grande, plus la vitesse sera grande.

[Il semble que l'énoncé nous pousse à écrire que la vitesse est proportionnelle à  $\exp \left( -\frac{\mathcal{E}_a}{RT} \right)$ .

Pourtant cette écriture nécessiterait l'hypothèse " $\mathcal{E}_a$  constante" ... J'avoue que je suis un peu perdu !]

**41)**  $A = \pi r^2$  et  $n_l = \frac{\pi r^3 \rho_0}{3M_{H_2O} \tan \theta} \rightarrow dG = \pi r \left( 2\sigma + (\mu_l(T) - \mu_v(T, P)) \frac{\rho_0 r}{M_{H_2O} \tan \theta} \right) dr$

**42)** Le nouveau rayon critique et la nouvelle énergie d'activation sont

$$r'_c = \frac{2\sigma M_{H_2O} \tan \theta}{(\mu_v(T, P) - \mu_l(T)) \rho_0} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_a = \frac{\pi\sigma}{3} r'^2_c = \frac{\pi\sigma}{3} \left( \frac{2\sigma M_{H_2O} \tan \theta}{(\mu_v(T, P) - \mu_l(T)) \rho_0} \right)^2 = \frac{(\tan \theta)^2}{4} \mathcal{E}_a$$

**43)** Dans les mêmes conditions de pression et température,  $\mathcal{E}'_a < \mathcal{E}_a$  si  $\theta < \arctan(2)$ .

La présence de particules comportant des cavités étroites permet à la vapeur d'eau de se condenser plus rapidement. Ces noyaux de condensation peuvent être des poussières, du pollen voire même des composés non naturels comme l'iodure d'argent, utilisés pour l'ensemencement des nuages afin de provoquer la pluie. Dans ces cavités, le rapport « interface liquide-gaz / volume de liquide » est plus faible et donc plus favorable à la condensation car alors, la croissance de l'énergie de surface est contenue.