Banque CCINP : Ex. 63,66, 78, (réviser : 80,81, 82 déjà vus pl. T3)

Premières manipulations sur les adjoints

Exercice 1 (Calcul d'adjoint d'un endomorphisme de rang 1)**.**
Soit E un espace vectoriel euclidien et $(a,b) \in E^2$ deux vecteurs linéairement indépendants. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\forall\, x \in E,\ u(x) = (a|x)b$.
Déterminer explicitement u^*.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension n et $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$.
On note $S = \{u \in \mathscr{L}(E),\ \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ (u+u^*)(x_i) = 0\,\}$. Déterminer $\dim(S)$.
Indication – On pourra travailler matriciellement dans une b.o.n. adaptée.

Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

Exercice 3. Identifier les $a, b \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice en b.o.n. $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = -A$.

Exercice 4 (Symétries orthogonales : notion d'hyperplan médiateur)**.** Montrer que si x et y sont deux vecteurs distincts et de même norme d'un espace euclidien E, il existe un unique hyperplan H de E tel que $y = s_H(x)$ où s_H désigne la symétrie orthogonale par rapport à H.

Exercice 5. Soient E un espace euclidien, $f \in O(E)$ et F un s.e.v. de E.
Montrer que $f(F^\perp) = f(F)^\perp$.

Exercice 6. Soit E euclidien.
On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est une *similitude* si, et seulement si, $f = \lambda g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $g \in O(E)$.
On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ préserve l'orthogonalité ssi $\forall\,(x,y) \in E^2,\ (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$: montrer que f préserve l'orthogonalité ssi f est une similitude ou bien $f = 0$.

Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques réelles : théorème spectral

Exercice 7 (Une démonstration « hermitienne » (i.e. avec le p.s. complexe hors programme) du fait que les matrices sym. réelles ont toutes leurs v.p. réelles)**.**

a) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique.
   (i) Montrer que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\overline{X}^\top.A.X \ \in \mathbb{R}$.
   (ii) En déduire que toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont en fait réelles.
b) En adaptant le raisonnement précédent, que dire des v.p. complexes des matrices antisymétriques réelles ?

Exercice 8. Donner un exemple d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ symétrique et non diagonalisable.

Exercice 9 (endomorphismes antisymétriques)**.** Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$$

a) Montrer que la matrice de u dans une base orthonormale de E est antisymétrique.
b) Montrer que $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ est stable par u.
c) Montrer qu'il existe une b.o.n. de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

avec N inversible et antisymétrique.
d) Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 10 (Incontournable : racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive)**.** a)

Révision : soit E un K-e.v. de dim finie et $(u,v) \in \mathscr{L}(E)$ dz qui commutent entre eux. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui diagonalise simultanément u et v.

b) Soit E euclidien et $u \in S^+(E)$. Montrer qu'il existe un $v \in S^+(E)$ tel que $v^2 = u$.

c) A l'aide du a) montrer l'unicité de la matrice v du b).

d) Montrer qu'en outre il existe un $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Exercice 11 (Inégalité d'Hadamard pour les matrices symétriques)**.** Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrie réelle positive.

Montrer que $0 \leq \det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$

Bonus : Si A est définie positive, on peut montrer aussi que l'égalité n'a lieu que si A est diagonale.

Indication de méthode possible : on pourra écrire les $a_{i,i}$ comme combinaison convexe des valeurs propres de A.

Exercice 12 (Toute matrice dz représente un endo. autoadjoint pour un certain produit scalaire)**.** Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $E = M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$, $(X,Y) \mapsto X^\top SY$.

a) Vérifier que φ est un produit scalaire sur E.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $a : E \to E$, $X \mapsto AX$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer que a est autoadjoint pour le produit scalaire φ si, et seulement si,

$$A^\top = SAS^{-1}$$

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable ssi il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A^\top = SAS^{-1}$.

Exercice 13. Soit $(E, (\ |\ ))$ euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

On note $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ la norme d'opérateur de u (subordonnée au choix de la norme euclidienne dans E) et $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$ le rayon spectral de u.

Montrer que : $\|u\| \overset{(1)}{=} \rho(u) \overset{(2)}{=} \max\limits_{\|x\|=1} |(u(x)|x)|$.

Exercice 14. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et $E = \{OSO^{-1}, O \in O_n(\mathbb{R})\}$ ("l'orbite de S pour la conjugaison par $O_n(\mathbb{R})$).

a) Soit $A \in E$. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

b) Soit $g : [\lambda_1, \lambda_n] \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que :

$$\max\{\sum_{i=1}^n g(a_{i,i,}),\ A \in E\} = \sum_{k=1}^n g(\lambda_k).$$

Réduction des automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Exercice 15. Déterminer le commutant de $SO(2,\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ i.e. $\mathcal{C} = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \forall M \in SO(2,\mathbb{R}),\ AM = MA\}$

Exercice 16 (Racines carrées de matrices orthogonales)**.**

a) Montrer que pour tout $A \in SO_n(\mathbb{R})$ il existe $B \in SO_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

b) La matrice B du a) est-elle unique ?

c) Que dire si $A \in O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$?

Le coin Centrale 2

Exercice 17 (Centrale 2 2024)**.** On considère la fonction $f : A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \longmapsto \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}|$

a) Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

b) Si $n = 2$, déterminer le maximum et le minimum de f .

c) Après avoir écrit `from random import random`, la commande `random()` renvoie un nombre aléatoire de $[0,1[$ suivant une loi uniforme. (Mieux avec `numpy.random` vous pouvez fabriquer directement des vecteurs ou matrices aléatoires).
Après avoir écrit `import numpy as np`, la commande `np.cross(u,v)` renvoie le produit vectoriel de u et v. On veut dans cette question conjecturer le minimum de f pour $n = 3$.
   i) Ecrire une fonction `aleatoireR3()` qui renvoie un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^3$ de norme 1.
   ii) Ecrire une fonction `orthogonalR3(u)` qui prend en argument un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ non nul et qui renvoie un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à u.
   iii) Ecrire une fonction `matriceorthogonale()` qui renvoie une matrice aléatoire de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.
   iv) Conjecturer le minimum de f pour n = 3.

d) Trouver le minimum de f pour un n fixé quelconque.

e) (Suite possible de l'énoncé non transmis) :
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $f(A) \leq n\sqrt{n}$

f) Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si,

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |a_{i,j}| = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (*).$$

g) La question qui se pose alors est de savoir pour quelles valeurs de n, il existe une matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$. Montrer que c'est possible pour $n = 2$ et $n = 4$ (puis par récurrence par bloc pour toutes les puissances de 2), impossible pour n impair. La conjecture de Hadamard (non démontrée) suggère que ce serait possible pour tous les multiples de 4.

Exercice 18 (Centrale 2 2024)**. Le jury fournissait une fonction fabriquant une matrice orthogonale aléatoire, en voici une :**

```
def ortho_alea(n):
    A = rd.random((n, n)) #matrice alea de loi unif sur [0,1]
   # Effectue la décomposition QR
    Q, R = alg.qr(A)
    return Q
```

a) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A' \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = (A')^2$

b) **Définition** – Pour tout $A, B \in S_n(\mathbb{R})$, on pose $A \leq B$ si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX \leq X^\top BX$ ce qui équivaut encore à $B - A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Remarque : même si l'exercice ne demande pas de le vérifier, on peut rapidement se convaincre qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre dans $S_n(\mathbb{R})$.
Ecrire une fonction Python `f(A,B)` qui renvoie `True` ssi $A \leq B$.

c) Ecrire une fonction qui renvoie une matrice aléatoire dans $S_n(\mathbb{R})$ dont les v.p. sont dans $[0,1[$.

d) On note $(X|Y)$ le p.s. canonique de deux vecteurs X, Y dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $(X,Y) \mapsto (AX|Y)$ est un produit scalaire qu'on notera $(\ |\ )_A$.

e) Soient A, B dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M = A^{-1}B$. Montrer que $f\ :\ X \mapsto MX$ est un endomorphisme autoadjoint de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le p.s. $(\ |\ )_A$.

f) En déduire que $A \geq B$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(A^{-1}B) \subset]0,1]$.
(Fin de l'énoncé transmis par Raphaël)

g) Prolongement possible : pour tout $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, on note $\sqrt{A}$ l'unique matrice dans $S_n^+(\mathbb{R})$ dont le carré vaut A (justifier cette unicité).
Montrer que cette fonction racine carrée est *strictement croissante* sur $S_n^+(\mathbb{R})$ autrement dit que si $A - B > 0$ alors $\sqrt{A} - \sqrt{B} > 0$.

Décompositions matricielles

Les exercices suivants s'enchaînent en fait ici comme les questions d'un problème.

Exercice 19 (Décomposition $Q.R.$ traduction matricielle de Gram-Schmidt)**.** Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que

$$A = QR.$$

Indication – Pour l'existence, on pensera en terme de matrice de passage et de Gram-Schmidt.

Exercice 20 (Toute matrice Symétrique Positive est une matrice de Gram (et réciproquement))**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists\, M \ \in M_n(\mathbb{R}) \quad A = M^\top.M.$$

Rappel : $M^\top.M(i,j) = (C_i|C_j)$ cette matrice de p.s. s'appelle *matrice de Gram.*

Exercice 21 (Décomposition de Choleski)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

Montrer qu'il existe une unique matrice B triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = BB^\top$ ou encore une unique matrice triangulaire supérieure T à éléments diagonaux st. positifs telle que

$$A = T^\top T.$$

Indication pour l'existence : on peut utiliser les deux exercices précédents.

Exercice 22 (Application de décomposition de Choleski)**.** a) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique réelle positive. Montrer que

$$0 \le \det(A) \le \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Si A est définie positive, montrer aussi que l'égalité n'a lieu que si A est diagonale.

b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, montrer l'inégalité de Hadamard suivante :

$$|\det(M)| \le \prod_{j=1}^{n} ||C_j||$$

où $||C_j|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2}$.

Déterminer aussi la CNS d'égalité, et interprétation géométrique pour $n = 2$ ou $n = 3$?

Exercice 23 (Décomposition polaire de Cartan)**.** Montrer que tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $M = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive.

Exercice 24 (Jolie application de l'unicité dans Choleski pour un résultat sur l'action du groupe orthogonal)**.**

a) Soit M et M' deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que ${}^tMM ={}^t M'M'$ si, et seulement si, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M' = OM$.

b) Interprétation géométrique : soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont deux familles libres de vecteurs d'un e.v. euclidien E ayant même matrice de Gram i.e.telle que pour tout (i,j), $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$.

Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(E)$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(x_i) = y_i$.