Banque CCINP : Ex. 29,30, 50.

Etude et calcul de fonctions définies par un intégrale à paramètre, en dérivant et E.D.

Exercice 1.

a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}, |\arctan u| \leqslant |u|$.

b) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t\,(1+t^2)}\mathrm{d}t$

i) Domaine de définition de F ?

ii) Domaine de continuité de F ?

iii) Domaine de dérivabilité de F ?

iv) Déterminer F'.

v) En déduire F.

Exercice 2 (Un calcul commencé en cours...)**.** On note $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$

a) Culture bienvenue : connaissez vous la valeur de G ? La question b) qui suit va permettre de démontrer ce résultat au b) (iv).

b) On considère la fonction $F\,:\,x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt.$

i) Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$, et dérivable sur $]0,+\infty[$.

ii) Montrer que F vérifie sur $]0,+\infty[$ une E.D. dont on exprimera les solutions en fonctions de G.

iii) En utilisant la continuité de F en 0, exprimer alors F en fonction de G.

iv) En considérant la limite de F en $+\infty$, montrer $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) **Bonus (d'autres idées...)** A l'aide d'une expression trouvée pour F grâce à l'E.D. obtenir un D.A. à deux termes significatifs de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 3. Soir $x \geq 0$, on va calculer $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}dt.$

a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f'. On suppose connue l'intégrale G de l'exercice 2.

b) Montrer que f est continue en 0 : pour la domination, on peut séparer l'intégrale en deux morceaux.

c) Conclure sur la valeur explicite de f.

Une application plus inattendue de la dérivation sous le signe intégrale :

Exercice 4 (Théorème de factorisation dans l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(r-1)}(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = x^r g(x).$$

Autrement dit f est *divisible* par $x \mapsto x^r$ dans l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Indication – Ecrire f comme une intégrale... Faire aussi une preuve plus élémentaire pour $r = 1$.

Comportement à l'infini d'intégrales à paramètre

Exercice 5. On pose : $\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\ \mathrm{d}t.$

a) Montrer que f est définie.

b) Montrer que f est continue.

c) Montrer que f est décroissante.

d) On pose : $\forall x \in]0,+\infty[, g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)}\mathrm{d}t$. Montrer que $g(x) = \frac{\ln 2}{x}$.

e) Montrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

f) Montrer que $g(x) - f(x) \leqslant \frac{\ln 2}{2x+1}$ pour tout $x > 0$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$

Exercice 6 (Transformée de Laplace de $t \mapsto 1/\sqrt{1+t}$, précision p.r. au théorème de la valeur finale)**.**

a) Soit $f\,:\,\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\, x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}}du$. (i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(ii) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Soit $L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t}}dt$. Déterminer un équivalent de $L(x)$ en 0^+ et en $+\infty$