Banque CCINP : Ex. 31, 32, 42, 55, 74, 75

Exponentielle matricielle

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $e^A.e^B$, $e^B.e^A$ et $\exp(A+B)$.

Exercice 2. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $R_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $\exp(M) = R_t$.
Indication – On pourra considérer la trace des M candidats puis justifier que M et R_t commutent.

Systèmes différentiels à coefficients constants

Exercice 3. Résoudre les systèmes $X' = AX$ a) si $A = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix}$ b) si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. a) Déterminer $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{cases}$

b) En déduire les solutions du problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 3 \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + 1 \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 5. Résoudre : $\begin{cases} x'(t) + x(t) + y(t) = t^2, \\ y'(t) + y(t) + z(t) = t \\ z'(t) + z(t) = 1 \end{cases}$

Exercice 6 (Un cas *très favorable* de système à coefficients non constants)**.**

a) On pose, pour t réel, $M(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 1-t & 0 \\ 2t-2 & 2t-1 & 0 \\ 2-2t & 1-t & t \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout t réel, $P^{-1}M(t)P$ soit diagonale.

b) Résoudre alors le système différentiel $X'(t) = M(t)X(t)$, où le vecteur inconnu $t \mapsto X(t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.

N.B. C'est la *réduction simultanée* i.e. avec la même matrice de passage P indépendante de t du a) qui permet une résolution simple au b).

Résultats qualitatifs sur les solutions de S.D.L.

Exercice 7 (On veut que *toutes* les solutions qui tendent vers zéro en $+\infty$: stabilité asymptotique)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que toutes les solutions de l'E.D. $X' = AX$ tendent vers 0 en $+\infty$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$.
Indication pour le sens difficile : on peut utiliser la décomposition sur les s.e.v. caractéristiques.

Recherche de solutions particulières D.S.E. ou autre de l'équation homogène et comment trouver les autres...

Exercice 8 (Fonction de Bessel J_0)**.** a) Trouver les solutions D.S.E. de l'E.D. $xy'' + y' + y = 0$. A-t-on obtenu toutes les solutions sur de l'E.D. sur $]0,+\infty[$?

On note f celle qui vaut 1 en 0.

b) Montrer qu'il existe un $x_0 \in]0,2]$ qui est le plus petit zéro de f dans cet intervalle autrement dit $f(x_0) = 0$ et $\forall\, x \in]0, x_0[,\ f(x) \neq 0$.

Exercice 9. On considère sur $]0,+\infty[$ l'E.D. d'inconnue $t \mapsto x(t)$

$$tx''(t) + tx'(t) - x(t) = 0 \quad (E)$$

a) Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $t \mapsto t^{\alpha}$ soit solution de (E).

b) A l'aide de la solution trouvée précédemment, trouver toutes les solutions de l'E.D. (E) sur $]0, +\infty[$.

c) (i) Déterminer les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ qui se prolongent en une fonction continue sur $[0, \infty[$.

(ii) Déterminer les solutions qui se prolongent en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Comportement qualitatifs des équations du second ordre à coeff. non constant

Exercice 10 (La M.V.C. permet de résoudre « formellement » et de lier les prop. de la solution à celle du second membre)**.** Soit $(E)\ :\ y'' - ay = b(x)$ avec $a > 0$ fixé et $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *bornée*

Montrer que (E) possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $(E)\ :\ y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ avec a_1, a_0 continue sur un intervalle I.

a) Théorème de séparation de Sturm : Montrer que si y est une solution de (E) qui n'est pas la fonction nulle et si $y(x_0) = 0$ alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel y ne s'annule pas à part en x_0.

b) Théorème d'entrelacement : Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée (E_H) alors , entre deux zéros consécutifs de y_1, il y a exactement un zéro de y_2. *Indication* – Considérer le wronskien des solutions (y_1, y_2).

Exercice 12 (Un « potentiel »)**.** Soit E l'E.D.L $e^{-x^2}y''+y = 0$. En considérant $V(x) = e^{-x^2}(y')^2+y^2$, montrer que toute solution de (E) est bornée.

Exercice 13. Soit $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{-*})$, et soit $(E)\ :\ y''(t) + a(t)y(t) = 0$.

a) Montrer que pour tout solution $t \mapsto y(t)$ de (E), la fonction y^2 est *convexe.*

b) Montrer que la seule solution de (E) qui est bornée sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.