Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A\ : I \to M_n(\mathbb{K})$ une fonction dérivable.

a) Justifier que $t \mapsto \det(A(t))$ est dérivable.

b) On suppose que $\forall t \in I$, $\det(A(t)) \neq 0$. En déduire que $t \mapsto A(t)^{-1}$ est dérivable.

c) En déduire alors que pour tout $t \in I$ $\dfrac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1}.A'(t).A(t)^{-1}$

Exercice 2 (Fonctions, à valeurs vectorielles, vérifiant l'égalité de la moyenne)**.** Soit E un e.v.n. de dim finie. Trouver les applications $f : \mathbb{R} \to E$ continues par morceaux et telles que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2af(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t)dt.$$

Indication – On commencera par remarquer que ces fonctions sont en fait nécessairement $\mathcal{C}^\infty$ (c'est ≪ l'effet régularisant ≫ des équations fonctionnelles). Ensuite on pourra voir que f' est constante.

Exercice 3. Soit E un e.v.n. de dim. finie. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],E)$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $k = \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|$. Montrer que $\| \displaystyle\int_a^b f(t)dt\| \leq \dfrac{k(b-a)^2}{4}$.

Exercice 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-tA)dt$.

Exercice 5 (Théorème du relèvement)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{C})$ avec $p \geq 1$, telle que $f(I) \subset \mathbb{U}$. Montrer qu'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ telle que $\forall\, t \in I,\ f(t) = \exp(i\theta(t))$.
Indication – On pourra raisonner par analyse-synthèse.

Exercice 6 (CNS d'égalité dans l'I.T.I)**.** 1) Montrer que si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_a^b |f| = |\int_a^b f|$ alors f est de signe constant.

2) Soient E un espace *euclidien* et $f : [a,b] \to E$ une fonction continue. On suppose que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\|dt$$

On veut montrer qu'il existe $e \in E$ de norme 1 tel que $f(t) = \|f(t)\| \cdot e$ pour tout $t \in [a,b]$.

a) Pourquoi le résultat est-il évident si $\int_a^b f(t)dt = 0$? On suppose dans ce qui suit que $\int_a^b f(t)dt \neq 0$.

b) On pose alors

$$e_1 = \frac{\int_a^b f(t)dt}{\left\|\int_a^b f(t)dt\right\|} \text{ de sorte que } \int_a^b f(t)dt = \left\|\int_a^b f(t)dt\right\| e_1$$

Montrer le résultat demandé en travaillant dans une b.o.n. $(e_1, \ldots, e_n)$ obtenue en complétant e_1.
N.B. Ce résultat s'applique notamment à $E = \mathbb{C}$ avec le module : comment formule-t-on la CNS d'égalité dans ce cas ?

Exercice 7 (Approximation numérique de la dérivée en un point)**.**

Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie.

a) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $f \in \mathcal{C}^2([x_0, x_0 + h], E)$.
On note $\Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ et $M_2 = \displaystyle\sup_{x\in[x_0,x_0+h]} \|f''(x)\|$.
Montrer que : $\left\| \dfrac{\Delta_h f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right\| \leq \dfrac{h}{2} M_2$.

b) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $f \in \mathcal{C}^3([x_0 - h, x_0 + h], E)$.
Soit $M_3 = \displaystyle\sup_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \|f^{(3)}(x)\|$.
On note $\delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0 - h)$.
Montrer qu'il existe une constante C que l'on précisera telle que : $\left\| \dfrac{\delta_h f(x_0)}{2h} - f'(x_0) \right\| \leq Ch^2 M_3$.

c) En supposant que les nombres M_3 et M_2 sont du même ordre de grandeur, pour h assez petit, et sous les hypothèses du b), quelle approximation de $f'(x_0)$ préférer ?

Révisions sur les E.D.L. de première année

Techniques de calculs et problèmes de raccords

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant l'E.D. $xy' - 4y = 0$.

Exercice 9 (E.D. avec raccord)**.** a) Résoudre sur chaque intervalle $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ l' E.D. $x\ln(x)y' + y = x$.

b) Etudier les éventuelles solutions sur $]0,+\infty[$ de cette même E.D.

Exercice 10 (Encore un raccord)**.** Résoudre $\tan(x)y' + 2y = \cos(2x)$ sur $]0,\pi/2[$ puis sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

Résultats plus qualitatifs :

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ bornée. Soit $(E)\ :\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ y'(x) + y(x) = f(x)$.

Montrer que toutes les solutions y de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 12. Montrer que toutes les solutions y de l'E.D. $y' + \exp(x^2)y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 13. Soit $\alpha > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) + \alpha f(x) = 0 \in \mathbb{R}$. On veut montrer qu'alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

a) En posant $\varphi = f' + \alpha f$ exprimer f en fonction de φ via la M.V.C.

b) Ensuite montrer que le terme intégral tend vers zéro, à l'aide d'un théorème d'intégration des relations de comparaisons.

c) Généralisation : on suppose maintenant qu'on a les mêmes hypothèses mais que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) + \alpha f(x) = l \in \mathbb{R}$. Que conclure sur $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

Exercice 14 (Inéquations diff. lin. d'ordre un, inégalité de Gronwall)**.** Soient a une application continue de $I = [t_0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$. Soient x,y deux fonctions vérifiant :

$$\begin{array}{rcll} x(t_0) & \leq & y(t_0), & (1) \\ \forall\, t \in I,\ x'(t) & \leq & a(t)x(t), & (2) \\ \forall\, t \in I,\ y'(t) & = & a(t)y(t) & (3) \end{array}$$

Montrer qu'alors pour tout $t \in I$ on a $x(t) \leq y(t)$.

Calculs pour les E.D.L. d'ordre deux à coefficients constants

Exercice 15. Résoudre $y'' - y = e^x + e^{-x}$.

Exercice 16. Soit $\omega > 0$ et (E) l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega x)$.