D.S. 5 MP : convolution et analyse de Fourier

Introduction

Notations On note :

— $C(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

— $C_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions continues bornées.

— $L^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions continues intégrables sur $\mathbb{R}$.

— $L^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ des fonctions continues de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, on pose :

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|,\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\mathrm{d}t,\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\ \mathrm{d}t}.$$

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Définitions

Déf. 1 : Soit f une fonction complexe d'une variable réelle. Par définition, le *support* de f est l'adhérence de l'ensemble $A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. On dit que f est à *support compact* si son support est un fermé borné de $\mathbb{R}$; en d'autres termes, f est à support compact si et seulement s'il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

On note encore $C_c(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ formé des fonctions continues à support compact.

Déf. 2 : Par définition, une *approximation de l'unité* est une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R}; \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n = 1; \\ \forall \varepsilon > 0, & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n = 0. \end{cases}$$

Déf. 3 : Pour toute fonction $h \in C(\mathbb{R})$, 2π-périodique, et tout $n \in \mathbb{Z}$, on note :

$$c_n(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{-int}dt$$

appelé *n-ième coefficient de Fourier complexe de h*. Et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_N(h)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_n(h)e^{inx}$$

appelée somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de h.

Théorème admis On admet le :

Théorème de convergence uniforme de Dirichlet : si $h \in C(\mathbb{R})$ est 2π-périodique *et* $\mathcal{C}^1$-par morceaux, alors la suite de fonction $(S_N(h))$ de la déf.$_3$ converge *normalement* sur $\mathbb{R}$ vers h. En particulier la convergence simple dit que h est *somme de sa série de Fourier*, ce qu'on écrira :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(h)e^{inx}$$

I Produit de convolution

Soit $f, g \in C(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$$

La fonction $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g.

I.A - Généralités

I.A.1) Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f * g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et donner une majoration de $\|f * g\|_\infty$ pouvant faire intervenir $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

a) $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C_b(\mathbb{R})$;

b) $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

I.A.2) Soient $f, g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f * g(x)$ soit défini pour tout réel x. Montrer que $f * g = g * f$.

I.A.3) Montrer que si f et g sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact.

I.B - Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

Pour toute fonction h de $C(\mathbb{R})$ et tout réel α, on définit la fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x - \alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans cette sous-partie I.B, on suppose que f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

I.B.1) Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\lim_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0.$$

I.B.2) Pour tout réel α, montrer que $T_\alpha(f * g) = (T_\alpha(f)) * g$.

I.B.3) Pour tout réel α, montrer que $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$.

I.B.4) a) Montrer qu'une fonction continue à support compact est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b) Déduire des questions précédentes que si f est à support compact alors $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.B.5) a) Montrer que l'espace $C_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est un sous-espace vectoriel dense dans $(L^2(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$. On en déduit que $C_b(\mathbb{R})$ est aussi dense dans $(L^2(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$.

b) Déduire des questions précédentes que pour toutes les fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ la fonction $f * g$ est uniformément continue.

I.C - Continuité, dérivabilité, séries de Fourier

I.C.1) On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $f * g$ est continue.

b) Montrer que si g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.C.2) Soit k un entier naturel non nul. On suppose que g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k, sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f * g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée d'ordre k.

I.C.3) **Dans toute cette question I.C.3, on suppose que g est continue, 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux** donc par le théorème de convergence de Dirichlet donné dans l'introduction, on peut écrire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g) e^{inx},$$

la série convergeant *normalement* sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si $(\alpha_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est telle $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n| < +\infty$ alors en notant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx}$$

on a

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \alpha_n = c_n(\varphi).$$

b) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $f * g$ est bien définie, 2π-périodique et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (f * g)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f * g)e^{inx}.$$

Expliciter les coefficients de Fourier de $f * g$ à l'aide des coefficients de Fourier de g et d'intégrales faisant intervenir f.

I.D - Approximation de l'unité

Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$ et soit $(\ \delta_n\ )$ une suite de fonctions approximation de l'unité (cf. déf.$_2$ de l'introduction).

I.D.1) On va montrer dans cette question que la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. On note $\varphi_n(x,t) = |f(x-t) - f(x)|\delta_n(t)$.

a) Justifier qu'il existe un $\alpha > 0$ (dépendant a priori du réel x) tel que $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(x,t)dt \leqslant \varepsilon$.
b) Conclure.

I.D.2) Montrer que si f est à support compact, le α de la question a) précédente ne dépend pas de x et la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.3) Pour tout entier naturel n, on note h_n la fonction définie sur $[\ -1, 1\ ]$ par

$$h_n(t) = \frac{\left(1 - t^2\right)^n}{\lambda_n}$$

et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^n\ \mathrm{d}t$$

a) Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.
b) Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
Remarque : il est assez facile d'en déduire (non demandé ici) une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

I.D.4) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on ait $f * g = f$.
On pourra raisonner par l'absurde et considérer pour une telle fonction g, la suite $(h_n * g)(0)$.

II Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\ \mathrm{d}x$$

II.A - Premières propriétés

II.A.1) Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

II.A.2) Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $(\ L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\ )$ dans l'espace vectoriel normé $(\ L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\ )$.

II.A.3) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout réel x. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ, exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ.

II.B - Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Soient f et g sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, en outre, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ de sorte que le produit de convolution $f * g$ est bien définie et continu sur $\mathbb{R}$ comme prouvé au I.A et I.C.

II. B On suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. En admettant que, pour tout ξ réel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(t) g(x-t) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(t) g(x-t) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

existent et sont égales montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

II. C - Introduction d'une fonction plateau

On cherche dans cette sous-partie à construire une fonction réelle positive ρ, définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\rho(t) = 1$ pour tout $t \in [-1,1]$ et $\rho(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-1/t} & \text{sinon} \end{cases}$$

II C1 Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On pourra montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \forall t > 0, \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)\mathrm{e}^{-1/t}$.

Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]-1,1[\\ \mathrm{e}^{1/(t^2-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

II C2 Montrer, en l'exprimant à l'aide de φ, que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

II C3 Soit θ l'unique primitive de ψ s'annulant en 0 . Montrer que θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, constante sur $]-\infty,-1]$ (on note A cette constante) et constante sur $[1,+\infty[$ (on note B cette constante). Vérifier que $A \neq B$.

II C4 Construire alors une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[-1,1]$ et constante égale à 0 sur $\mathbb{R} \setminus [-2,2]$. La fonction φ est donc $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.

II.D - Inégalité de Bernstein

On admet les formules suivantes, dites formules d'inversion de Fourier :

— si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \hat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi$;

— si $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, si $a : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \alpha(\xi) \mathrm{d}\xi$, et si $a \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\alpha = \hat{a}$.

On remarque que ces résultats permettent d'affirmer que, si f et g sont deux fonctions continues telles que f, g, $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont intégrables et si $\hat{f} = \hat{g}$, alors $f = g$.

On considère toujours la fonction ρ définie à la question II C4. Soit r la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout réel x,

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \rho(\xi) \mathrm{d}\xi$$

II D1 Montrer que r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa fonction dérivée (faisant éventuellement intervenir une intégrale).

II D2 Montrer que $x \mapsto x^2 r(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et en déduire que r est intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$.

On admet qu'en utilisant la même méthode, on montre que r' est intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda > 0$ et soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\hat{f}$ soit nulle en dehors du segment $[-\lambda, \lambda]$ (on dit que « f est limitée en fréquences »).

On note r_λ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $r_\lambda(x) = r(\lambda x)$ pour tout réel x.

II D3 On admet que $f * r_\lambda$ est intégrable. Montrer que $f = \lambda f * r_\lambda$.

II D4 En déduire que, si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$, indépendante de λ et de f, telle que

$$\|f'\|_\infty \leqslant C\lambda \|f\|_\infty \quad \text{(inégalité de Bernstein).}$$