$$\boxed{\textbf{D.S. 5 : partie I CCS MP 2012 partie II CCS MP 2021 solution}}$$

I. Produit de convolution.

I.A.1) a) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, et $x \in \mathbb{R}$ est fixé, alors en notant $\varphi_x(t) = f(t)g(x-t)$:
(i) $t \mapsto \varphi_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues
(ii) $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $|\varphi_x(t)| \leqslant \|g\|_\infty |f(t)|$, majoration de φ_x par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
Avec (i) et (ii) on a prouvé que φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{(f * g)(x) \text{ est bien définie}}$.
En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|(f*g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)||g(x-t)|dt \leq ||g||_\infty \int_{\mathbb{R}} |f| = ||g||_\infty ||f||_1$$

Comme le majorant est indépendant de x, on conclut que $\boxed{(f*g) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \times \|g\|_\infty}$$

b) Si $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il en va de même de $t \mapsto g(x-t)$ et $\|g_x\|_2 = \|g\|_2$ par le changement de variable $t \longmapsto x-t$ admissible dans l'intégrale.

D'après le cours, le produit de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est un élément de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et plus précisément on a l'égalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{L}^2$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|.|g(x-t)|dt \leq (\int_{\mathbb{R}} f(t)^2)^{1/2} (\int_{\mathbb{R}} (g(x-t))^2 dt)^{1/2} = ||f||_2.||g||_2$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f*g)(x)$ est bien définie et

$$|(f*g)(x)| \leq ||f||_2.||g||_2$$

et comme ce majorant est indépendant de x, on a là aussi $(f*g)$ bornée et

$$\boxed{||f*g||_\infty \leq ||f||_2.||g||_2}$$

I.A.2) Par déf.

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$

Par le changement $t \longmapsto u = x-t$ admissible car $\mathcal{C}^1$-bijectif de $\mathbb{R}$ sur lui-même, on a :

$$\boxed{(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)du = (g*f)(x)}$$

I.A.3) Supposons f et g à support compact inclus respectivement dans $[-A, A]$ et $[-B, B]$.
Alors $f*g(x) = \int_{-A}^{A} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$.
Or pour $t \in [-A, A]$ si $|x| > A+B$ on a $|x-t| \geq |x| - |t| > B$ donc $g(x-t) = 0$.
Il en découle que

$$\boxed{f*g \text{ est à support compact inclus dans } [-(A+B), A+B].}$$

I.B - Produit de convolution de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

I.B.1) h est par définition uniformément continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ donné quelconque il existe $\beta > 0$ tel que pour tout α tel que $|\alpha| \leq \beta$, on ait $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|h(x) - h(x-\alpha)| \leqslant \varepsilon$ autrement dit pour tout α tel que $|\alpha| \leq \beta$, on ait $||h - T_\alpha(h)||_\infty \leq \varepsilon$. En d'autres termes si et seulement si $\lim_{\alpha \to 0} \|h - T_\alpha(h)\|_\infty = 0$

I B.2) Comme noté en I.A.1.b), si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il en va de même de $T_\alpha(f)$ et ainsi $T_\alpha(f) * g$ est bien définie d'après le résultat de cette question I. A 1 b). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'un côté :

$$T_\alpha(f*g)(x) \overset{def}{=} (f*g)(x-\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-\alpha-t)dt \tag{1}$$

De l'autre côté

$$(T_\alpha(f) * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} T_\alpha(f)(t) g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-\alpha) g(x-t)dt \tag{2}$$

Dans l'intégrale à droite de (2) on pose $u = t - \alpha$ et donc $t = u + \alpha$ ce qui dans (2) donne

$$(T_\alpha(f) * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u) g(x-u-\alpha)du \tag{3}$$

En comparant (1) et (3) on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ (T_\alpha(f) * g)(x) = T_\alpha(f * g)(x)}$$

I.B.3) Comme $T_\alpha(f), f$ et g appartiennent à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha(f*g) - f*g\|_\infty &= \|T_\alpha(f)*g - f*g\|_\infty \text{ par IB2)}\\
&= \|(T_\alpha(f) - f)*g\|_\infty \text{ par linéarité de l'intégrale}\\
&\leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2 \quad \text{par IA 1) b)}
\end{aligned}$$

I.B.4) a) C'est une conséquence facile du théorème de Heine en se plaçant sur un segment du type $[-A-1, A+1]$, où $[-A, A]$ contient le support de f, mais il faut quand même soigner l'argument de « recollement » : **argument par débordement**.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Il existe donc deux réels $a < b$ tels que

$$\operatorname{supp}(f) \subset [a, b].$$

En particulier, $f(x) = 0$ pour tout $x \notin [a, b]$.

Considérons le segment $[a-1, b+1]$. La fonction f y est continue, et comme ce segment est compact, le théorème de Heine assure que f est uniformément continue sur $[a-1, b+1]$. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0,\ \forall x, y \in [a-1, b+1],\ |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, f est constante égale à 0 sur $\mathbb{R} \setminus [a, b]$, donc uniformément continue sur $\mathbb{R} \setminus [a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus [a, b],\ |x-y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon.$$

Posons

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1).$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \delta$. Si x et y appartiennent tous deux à $[a-1, b+1]$, alors l'uniforme continuité sur ce segment donne le résultat.

Sinon, au moins l'un des deux points appartient à $\mathbb{R} \setminus [a-1, b+1]$. Dans ce cas, on a nécessairement $x, y \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, car la distance entre $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ et $[a-1, b+1]$ est au moins 1. Ainsi, $f(x) = f(y) = 0$, et donc

$$|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon.$$

Dans tous les cas, $|x-y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Cela montre que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.B. 4b) D'après le **I.B.1**), et le a) on a

$$\lim_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(f) - f\|_\infty = 0 \quad (*)$$

On veut montrer que $||T_\alpha(f*g) - (f*g)||_\infty \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} 0$ ce qui par I.B1) donnera la conclusion.

Par la majoration du I B3), il suffit de montrer que :

$$||T_\alpha(f) - f||_2 \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad (**)$$

Or, avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |T_\alpha(f) - f|^2 &= \int_{-A}^{A+\alpha} |f(x-\alpha) - f(x)|^2 dx \quad \text{car } f \text{ et } T_\alpha f \text{ sont nulles en dehors de } [-A, A+\alpha] \\ &\leq (2A+\alpha)\, \|T_\alpha(f) - f\|_\infty^2\end{aligned}$$

Avec cette majoration, $(*)$ donne bien $(**)$ ce qui démontre bien l'uniforme continuité de $(f * g)$.

I.B.5) a) Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et pour n entier non nul soit un réel $\alpha_n > 0$ qu'on va préciser plus tard. Soit alors la fonction f_n continue à support compact définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) \text{ pour } t \in [-n, n], \\ 0 \text{ pour } |t| \geqslant n + \alpha_n \\ \ f_n \text{ affine sur } [-n-\alpha_n, -n] \text{ et sur } [n, n+\alpha_n]\,. \end{cases}$$

On a

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}\setminus[-n-\alpha_n, n+\alpha_n]} f^2 + \int_{-n-\alpha_n}^{-n} |f - f_n|^2 + \int_n^{n+\alpha_n} |f - f_n|^2 =: I_n + J_n + K_n$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Comme $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il existe n_0 tel que $\int_{\mathbb{R}\setminus[-n_0, n_0]} |f|^2 \leqslant \varepsilon$. Donc

$$\forall\, n \geq n_0, \|f - f_n\|_2^2 \leqslant \varepsilon + J_n + K_n$$

En outre

$$\sqrt{K_n} \leqslant \sqrt{\int_{[n, n+\alpha_n]} |f|^2} + \sqrt{\int_{[n, n+\alpha_n]} |f_n|^2} = a_n + b_n$$

par l'inégalité triangulaire pour la $\|\ \|_2$

Or $a_n \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ pour $n \geqslant n_0$ et comme f_n est affine entre n et $n + \alpha_n$, égale à $|f(n)|$ en n et nulle en $n + \alpha_n$ on a $|f_n(t)| \leqslant |f(n)|$ pour $t \in [n, n+\alpha_n]$. Donc, en choisissant α_n tel que $\sqrt{\alpha_n} = \dfrac{1}{n|f(n)|}$, on a :

$$b_n \leqslant \sqrt{\alpha}_n |f(n)| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

pour $n \geqslant N_1$ Ainsi $K_n \leqslant 4\varepsilon$ pour $n \geqslant \max(n_0, N_1)$.

De même pour J_n. Finalement $\|f - f_n\|_2^2 \leqslant 9\varepsilon$ pour $n \geqslant \max(n_0, N_1)$ ce qui établit le résultat.

b) Soient désormais f et g deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Pour montrer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il suffit, comme dans la question I B 4) précédente, d'établir que $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$.

On utilise le a) soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Il existe alors φ continue à support compact telle que $\|f - \varphi\|_2 \leqslant \varepsilon$ et on a alors

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \|T_\alpha(f) - f\|_2 &\leqslant \|T_\alpha(f) - T_\alpha(\varphi)\|_2 + \|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2 \\ &= \|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 + 2\|\varphi - f\|_2 \\ &\leqslant |\ T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 + 2\varepsilon \quad (***)\end{aligned}$$

Or puisque φ est continue à support compact, d'après le résultat $(**)$ de la démonstration de la question précédente I 4 b) il existe $\beta > 0$ tel que $\|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 \leqslant \varepsilon$ pour $|\alpha| \leqslant \beta$ Ainsi avec $(***)$ on obtient : $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \leqslant 3\varepsilon$ pour $|\alpha| \leqslant \beta$ ce qui prouve que $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$ et établit donc le résultat.

I.C - Continuité, dérivabilité, séries de Fourier.

I.C.1) Supposons que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

a) On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre

$(\mathbf{H}_0)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}, (t \longmapsto f(t)g(x-t)) \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$(\mathbf{H}_1)$ $\forall\, t \in \mathbb{R},\ (x \longmapsto f(t)g(x-t)) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$(\mathbf{H}_2)$ $\forall\, x,t \in \mathbb{R},\ |f(t)g(x-t)| \leqslant \|g\|_\infty \times |f(t)|$ majorant intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendant de x, ce qui établit que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Supposons désormais en outre g uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque.

Par déf. de l'uniforme continuité, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$|\alpha| \leq |\beta| \Rightarrow \forall\, u \in \mathbb{R},\ |g(u+\alpha) - g(u)| \leqslant \varepsilon$$

Mais alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x+\alpha) - (f*g)(x)| &= |\int_{\mathbb{R}} f(t)(g(x+\alpha-t) - g(x-t)dt| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|.|g(x-t+\alpha) - g(x-t)| \\
&\leq \|f\|_1 \times \varepsilon \quad \text{pour } |\alpha| \leqslant \beta
\end{aligned}$$

$f * g$ uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.C.2) On vérifie les hypothèses du théorème sur le caractère $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètre.

Pour tout $t, x \in \mathbb{R}$, notons $\varphi(x,t) = f(t)g(x-t)$.

(H1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x \mapsto f(t)g(x-t)dt)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$

(H2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $i \in [\![0, k]\!]$, $t \mapsto \dfrac{\partial i\varphi}{\partial x^i}(x,t) = f(t)g^{(i)}(x-t)$ est continue et $|\dfrac{\partial i\varphi}{\partial x^i}(x,t)| \leq |f(t)|\|g^{(i)}\|_\infty$ avec $t \mapsto |f(t)|\|g^{(i}\|_\infty$ intégrable indépendant de x.

Avec **(H1)** et **(H2)** on conclut bien que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$(f*g)^{(k)} = f * g^{(k)}$$

I.C.3) a) **N.B.** Ce lemme est la version complexe du lemme donné pour les coefficients de Fourier réels au chapitre I2.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition $c_n(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-int}dt$. Donc par définition de φ :

$$\begin{aligned}
c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikt})e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{i(k-n)t})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt \quad (*) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \delta_{k,n} \\
&= \alpha_n.
\end{aligned}$$

Or en notant $u_k : t \mapsto \alpha_k e^{i(k-n)t}$, on a $|u_k(t)| = |\alpha_k|$ pour tout t, donc $\|u_k\|_\infty = |\alpha_k$ et par hyp $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < +\infty$ donc la série de fonctions $\sum u_k$ converge *normalement* sur le segment $[0, 2\pi]$ en particulier uniformément et on peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment.

b) Commençons par remarquer que comme g est continue et périodique, elle est borné. Autrement dit $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$ et donc par I A 1) a) $f * g$ existe bien.

Par définition pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f*g)(x+2\pi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x+2\pi-t)dt$ et par 2π-périodicité de g, on a donc $(f*g)(x+2\pi) = (f*g)(x)$.

Reste à montrer que $(f*g)$ est somme de sa série de Fourier.

Comme rappelé par l'énoncé, le théorème de Dirichlet donne que

$$\forall\, u \in \mathbb{R},\ g(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{inu}$$

et en outre $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|$ converge. Soit $x\in\mathbb{R}$, on peut alors écrire (par commutativité de $*$)

$$\begin{aligned}
f*g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{int}dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{int}\ dt \quad (\dagger) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{in(x-u)}\ du \quad \text{en posant } u=x-t \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)(\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-inu}du)e^{inx} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx}(\ddagger)
\end{aligned}$$

avec $\alpha_n = c_n(g)(\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-inu}du)$

Justifions $(\dagger)$ avec le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue.

En posant $v_n(t) = f(x-t)c_n(g)e^{int}$, on remarque que :

$$\int_{\mathbb{R}} |v_n(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1 \times |c_n(g)|$$

donc $\sum\int_{\mathbb{R}}|u_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, ce qui permet d'appliquer le théorème d'I.T.T et $(\dagger)$.

Avec $(\ddagger)$,o n a là un développement en série trigonométrique de $f*g$ qui converge normalement (car $|\alpha_n| \leqslant \|f\|_1 \times |c_n(g)|$) donc par la question a), on sait pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\alpha_n = c_n(f*g)$.

Ainsi $f*g$ est égale à la somme de sa série de Fourier et

$$\forall\, n\in\ \mathbb{Z},\ c_n(f*g) = c_n(g)\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-int}\ \mathrm{d}t = c_n(g)\widehat{f}(n)$$

en introduisant déjà la transformée de Fourier qui apparaît plus loin dans le problème.

I.D - Approximation de l'unité.

I.D.1) Soit $\varepsilon>0$ donné quelconque et soit x fixé. Comme f est continue en particulier en x : il existe $\alpha=\alpha(x)$ tel que $\sup_{t\in[-\alpha,\alpha]}|f(x-t)-f(x)|\leqslant\varepsilon$ pour $|t|\leqslant\alpha$ Et il existe n_0 tel que $\int_{-\infty}^{-\alpha}\delta_n\leqslant\varepsilon$ et $\int_{\alpha}^{+\infty}\delta_n\leqslant\varepsilon$ pour $n\geqslant n_0$. En remarquant que $f(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\delta_n(t)\mathrm{d}t$ et $f*\delta_n=\delta_n*f$ il vient : $\Delta_n(x) \underset{\mathrm{DEF}}{=} |(f*\delta_n)(x)-f(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{-\alpha}\varphi_n(x,t)\mathrm{d}t + \int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi_n(x,t) + \int_{\alpha}^{+\infty}\varphi_n(x,t)\mathrm{d}t$ avec $\varphi_n(x,t) = |f(x-t)-f(x)|\delta_n(t)$. Or $\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi_n(x,t)\leqslant\varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha}\delta_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(t)\mathrm{d}t=\varepsilon$. Donc : $\Delta_n(x)\leqslant \varepsilon+\int_{-\infty}^{-\alpha}\varphi_n(x,t)\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{+\infty}\varphi_n(x,t)\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon+2\|f\|_\infty\times\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}\delta_n(t)\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{+\infty}\delta_n(t)\mathrm{d}t\right)\quad\forall n\in\mathbb{N}$ d'où il résulte que $\Delta_n(x)\leqslant(4\|f\|_\infty+1)\,\varepsilon$ pour $n\geqslant n_0$ ce qui établit bien la convergence simple de la suite $(f*\delta_n)$ vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Si f est en outre à support compact, classiquement elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ de sorte que le α de la question précédente ne dépend pas de x. La démonstration de la question précédente prouve alors que $\Delta_n(x)\leqslant(4\|f\|_\infty+1)\,\varepsilon\quad\forall n\geqslant n_0\quad\forall x\in\mathbb{R}$ En d'autres termes la suite $(f*\delta_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. I.D.3) a) h_n est clairement continue, positive et vérifie $\int_{\mathbb{R}}h_n=1$.

Remarquons que $\lambda_n = 2\int_0^1\left(1-t^2\right)^n\ \mathrm{d}t \geqslant 2\int_0^1\left(1-t^2\right)^n t\ \mathrm{d}t = \int_0^1(1-u)^n\ \mathrm{d}u = \int_0^1 u^n\ \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}$ Soit désormais $\alpha>0$ donné quelconque. Il vient $I_n(\alpha)\underset{\mathrm{DEF}}{=}\int_{\alpha}^{+\infty}h_n(t)\mathrm{d}t=0$ si $\alpha\geqslant1$ et sinon $I_n(\alpha)=\int_{\alpha}^1 h_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{(1-\alpha^2)^n}{\lambda_n}\leqslant(n+1)\left(1-\alpha^2\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ De même $\int_{-\infty}^{-\alpha}h_n=I_n(\alpha)$. Donc la suite (h_n) est bien une approximation de l'unité. b) Si f est continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ il résulte da la question I.A.3) que $f*h_n$ est à support inclus dans $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$.

Pour tout x on a $(f*h_n)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(t)h_n(x-t)\mathrm{d}t=\int_{-1/2}^{1/2}f(t)h_n(x-t)\mathrm{d}t$. Si en outre $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ on a $x-t\in[-1,1]$ pour tout $t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ donc $h_n(x-t)=\left(1-(x-t)^2\right)^n$ de sorte que $(f*h_n)(x)=$

$\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\left(1-(x-t)^2\right)^n\ dt$ qui par développement est clairement une fonction polynomiale en x et établit donc le résultat. c) Soit φ une fonction définie et continue sur $[a,b]$ puis soit ψ continue sur $\mathbb{R}$ à support compact qui coincide avec φ sur $[a,b]$, est nulle sur $]-\infty,a-1]$ et $[b+1,+\infty[$ et est affine sur $[a-1,a]$ et $[b,b+1]$. Soit enfin f définie par $f(x)=\psi\left(a-1+(b-a+2)\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)$. Elle est continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. D'après I.D.2) la suite $(f*h_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ vers f. Or d'après la partie b) ci-dessus $f*h_n$ est polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Ainsi il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) qui converge uniformément vers f sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Alors classiquemment (changement de variable affine) la suite de fonctions polynomiales (Q_n) définie par $Q_n(x)=P_n\left(-\frac{1}{2}+\frac{x-a+1}{b-a+2}\right)$ converge uniformément vers ψ sur $[a-1,b+1]$ donc a fortiori converge uniformément vers φ sur $[a,b]$. I.D.4) Supposons qu'il existe une telle fonction g. On a en particulier $h_n*g=h_n$ pour tout entier n. Or d'après I.D.1) la suite (h_n*g) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g puisque la suite (h_n) est une approximation de l'unité. Ainsi la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g. Or $h_n(0)=\frac{1}{\lambda_n}$ et $\lambda_n=2\int_0^1\left(1-t^2\right)^n\ dt$ tend vers 0 par le théorème de la convergence dominée (la suite $g_n(t)=\left(1-t^2\right)^n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction nulle et y est dominée par la fonction constante égale à 1 bien intégrable sur $]0,1[$). Ainsi la suite ($h_n(0)$) ne converge pas dans $\mathbb{R}$ ce qui est contradictoire avec le fait que la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Donc une telle fonction g n'existe pas.

II. Transformée de Fourier.

II.A 1) Avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres :
(H0) $\forall\, x\in\mathbb{R}\ t\longmapsto f(t)e^{ixt}$ est continue donc a fortiori continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
(H1) $\forall\, t\in\mathbb{R},\ x\longmapsto f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$
(H2) $\forall\, x,t\in\mathbb{R},\ \left|f(t)e^{ixt}\right|\leqslant|f(t)|$ le majorant étant définie par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendante de x.

Avec (H_0) et (H_2) sait que $t\mapsto f(x,t)$ est bien intégrable pour tout $x\in\mathbb{R}$ et donc $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et avec $(H_0),(H_1),(H_2)$, par le théorème citée $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$

II A.2) D'abord on montre que l'application arrive bien dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

L'application $f\mapsto\hat{f}$ est linéaire (linéarité du passage à l'intégrale). Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\forall\xi\in\mathbb{R},|\hat{f}(\xi)|\leq\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)e^{-ix\xi}\right|dx=\|f\|_1$$

et donc $\widehat{f}\in L^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\|\hat{f}\|_\infty\leq\|f\|_1\quad(\dagger)$$

L'application $f\mapsto\hat{f}$ est linéaire par linéarité de l'intégrale, et $(\dagger)$ montre alors qu'elle continue et même 1 lispchitzienne, pour les normes proposées.

$$f\mapsto\hat{f}\text{ est continue de }\left(L^1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_1\right)\text{ dans }\left(L^\infty(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty\right)$$

II A 2 f étant continue, g l'est aussi. De plus, le changement de variable linéaire $u=\lambda x$ donne

$$\int_0^a|g(x)|dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda a}|f(u)|du$$

et cette quantité admet une limite finie quand $a\to+\infty$ et aussi quand $a\to-\infty$. Il y a donc intégrabilité aux voisinage des infinis et

$$g\in L^1(\mathbb{R})$$

On peut alors écrire $\hat{g}(\xi)$ et le même changement de variable donne

$$\hat{g}(\xi)=\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\xi u/\lambda}du$$

et ainsi

$$\forall\,\xi\in\mathbb{R},\ \hat{g}(\xi)=\frac{1}{\lambda}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

II.B - Produit de convolution

Par définition

$$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)e^{-ix\xi}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}f(t)g(x-t)dt\right)dx$$

Avec le résultat admis,

$$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}f(t)g(x-t)dx\right)dt$$

On pose $u=x-t$ dans l'intégrale intérieure :

$$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(u+t)\xi}f(t)g(u)du\right)dt$$

et on peut "faire sortir" de l'intégrale les termes indépendants de la variable u

$$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(t)e^{-it\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\xi}g(u)du\right)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-it\xi}\hat{g}(\xi)dt$$

Là encore $\hat{g}(\xi)$ peut sortir de l'intégrale et on obtient $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

$$\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g}$$

II. C - Introduction d'une fonction plateau

La construction de ce II C est un grand classique, à retravailler pour de nombreux sujets

II C1 φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par théorèmes d'opération.
Montrons par récurrence que

$$\forall k\in\mathbb{N},H(k)\ :\ \exists P_k\in\mathbb{R}[X],\forall t>0,\varphi^{(k)}(t)=P_k(1/t)e^{-1/t}$$

Initialisation $H(0)$ avec vraie avec $P_0=1$.

Hérédité : Supposons $H(k)$ vraie pour un $k\in\mathbb{N}$ On peut alors redériver et obtenir

$$\forall t>0,\varphi^{(k+1)}(t)=\left(-\frac{1}{t^2}P_k'(1/t)+\frac{1}{t^2}P_k(1/t)\right)e^{-1/t}$$

Alors en posant $P_{k+1}=X^2\left(-P_k'+P_k\right)$, on a bien $P_{k+1}\in\mathbb{R}[X]$ et la propriété $H(k+1)$ est vraie.

La récurrence est établie.

Par ailleurs φ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ à dérivée identiquement nulle

Par le théorème de limite de la dérivée, pour montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ aussi en 0, il suffit de montrer que toutes les dérivées ont une limite finie à droite et gauche en 0 et que ces limites sont égales.

C'est le cas avec une limite nulle : évident à gauche et par croissances comparées à droite grâce à la propriété $H(k)$ pour tout k.

$$\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$$

II C2 Vérifions que

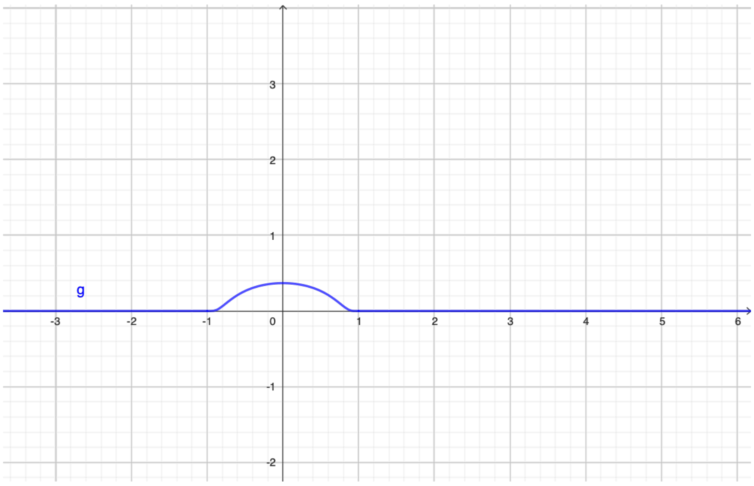
$$\forall t\in\mathbb{R},\psi(t)=\varphi\left(1-t^2\right)$$

En effet, si $|t|\geq 1, 1-t^2\leq 0$ et $\varphi\left(1-t^2\right)=0=\psi(t)$ et si $|t|<1,1-t^2>0$ et $\varphi\left(1-t^2\right)=e^{1/\left(t^2-1\right)}=\psi(t)$.

En conséquence, avec le II C1, par théorèmes d'opération,

$$\psi\in\mathcal{C}^\infty$$

N.B. Il est important d'avoir le graphe de g en tête « bump function » en anglais, « fonction cloche » en français. Cette fonction fait deux recollements $\mathcal{C}^\infty$ en 1 et en -1 avec la fonction nulle.



II C3 $\theta \in \mathcal{C}^\infty$ comme primitive d'une telle fonction. De plus θ' est nulle sur chaque intervalle $]-\infty,-1\,]$ et $[1,+\infty[$ et donc θ est constante sur chacun de ces intervalles.

$$\theta \text{ est constante sur }]-\infty,-1] \text{ et sur } [1,+\infty[$$

Par théorème fondamental,

$$\theta(x) = \int_0^x \psi(t)dt$$

et les constantes sont

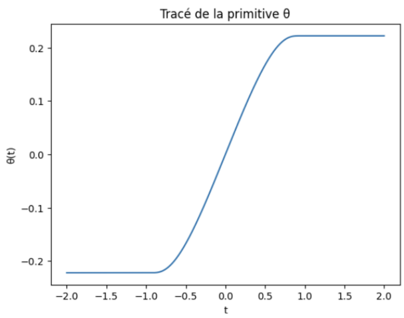
$$A = -\int_{-1}^0 e^{\frac{1}{t^2-1}}dt \text{ et } B = \int_0^1 e^{\frac{1}{t^2-1}}dt$$

Dans les deux cas, on intègre une fonction continue positive non nulle et les intégrales sont > 0. Ainsi

$$A < 0 < B$$

et les constantes sont en particulier différentes.

Là encore, on peut tracer le graphe de θ (fonction de raccord)



II C4 Une première normalisation de h pour régler les deux « hauteurs ».

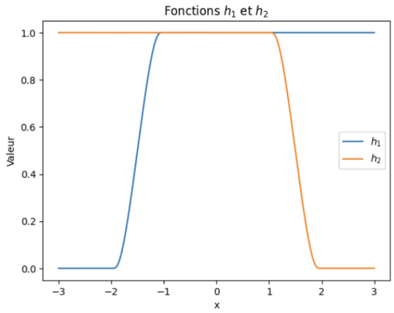
Notons $h_1 = \frac{\psi - A}{B-A}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]\,-\infty,-1\,]$ et valant 1 sur $[1,+\infty[$. $h_1(2x+3)$ vaut 0 si $x \leq -2$ et vaut 1 si $x \geq -1$.

Donc le graphe est sensiblement le même que h mais les deux phases « plateaux » sont aux valeurs 0 et 1.

Notons $h_2 = \frac{\psi - B}{A-B}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[\,1,+\infty\,[$ et qui vaut 1 sur $]-\infty,-1\,]$. $h_2(2x-3)$ vaut 0 si $x \geq 2$ et vaut 1 si $x \geq 1$.

Cette fois pour h_2 les plateaux sont « inversés »

Voici un schéma avec h_1 et h_2 (pas très bon, les raccords sont bien $\mathcal{C}^\infty$ alors que le dessin semble faire des points anguleux).



La fonction $\rho = h_1 h_2$ est nulle hors de $]-2,2[$ et vaut 1 sur $[-1,1]$. Son graphe est assez proche se lit directement sur le graphique précédent car lorsque $h_1 = 1$, $\rho = h_2$ et inversement !

Il existe $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[-1,1]$ et constante égale à 0 sur $\mathbb{R}\backslash[-2,2]$

II.D -Inégalités de Bernstein

II.D1 Par définition, comme ρ est nulle en dehors de $[-2,2]$

$$r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{+2} e^{ix\xi}\rho(\xi)d\xi \quad (\dagger)$$

On utilise le théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres.

(H0) Pour tout $x, \xi \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue sur le segment et donc intégrable sur ce segment.

(H1) Pour tout $\xi \in [-2,2], x \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$. - Pour tout $x, \xi \mapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue.

(H2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\xi \in [-2,2]$,

$$\left|i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)\right| \leq 2\|\rho\|_{\infty,[-2,2]}$$

et la fonction constante égale à $2\|\rho\|_{\infty,[-2,2]}$ est intégrable sur le segment $[-2,2]$, indépendante de x.

Donc par théorème :

$$r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ r'(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{ix\xi}\rho(\xi)d\xi$$

II. D2 Utilisons à nouveau l'expression $(\dagger)$ ci-dessus de r. Par deux intégrations par parties (sur un segment) et comme ρ et toutes ses dérivées sont nulles en 2 et -2 , on trouve

$$2\pi x^2 r(x) = i\int_{-2}^{+2} x e^{ix\xi}\rho'(\xi)d\xi = -\int_{-2}^{+2} e^{ix\xi}\rho''(\xi)d\xi$$

et ainsi

$$\left|x^2 r(x)\right| \leq \frac{1}{2\pi}4\,\|\rho''\|_{L^\infty([-2,2])}$$

$$x \mapsto x^2 r(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}$$

r est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont au voisinage des infinis. En notant M un majorant de $x^2 r(x)$, on a $|r(x)| \leq M/x^2$ qui prouve cette intégrabilité par comparaison aux fonctions de Riemann.

$$r \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}$$

Enfin, on a $|r(x)| \leq \frac{2}{\pi}\|\rho\|_{L^\infty([-2,2])}$ et

$$r \text{ est bornée sur } \mathbb{R}$$

II D3 Commençons par le cas $\lambda = 1$. Les fonctions f et r vérifient les hypothèses de la question II B et on a donc

$$\widehat{f * r} = \hat{f}\hat{r}$$

Par ailleurs, le second résultat d'inversion de Fourier fourni par l'énoncé donne

$$\rho = \hat{r}$$

et $\hat{r}$ est donc égale à 1 sur $[-1,1]$. Ainsi, $\hat{f}\hat{r}$ est égale à $\hat{f}$ sur $[-1,1]$ mais cela est aussi vrai ailleurs (où il y a nullité). On a donc $\widehat{f * r} = \hat{f}\hat{r} = \hat{f}$ et donc on a montré que

$$f * r = f$$

par la formule d'inversion de Fourier donnée par l'énoncé.

Pour un $\lambda > 0$ quelconque, on remarque que (changement de variable $u = \lambda t$)

$$f * r_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)r(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{u}{\lambda}\right)r(u)du = \frac{1}{\lambda}\left(f_{1/\lambda} * r\right)(\lambda x)$$

Or, $\widehat{f_{1/\lambda}}(x) = \lambda\hat{f}(\lambda x)$ est nulle en dehors du segment $[-1,1]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f_{1/\lambda} \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On peut donc, avec le premier cas, affirmer que $f_{1/\lambda} * r = f_{1/\lambda}$. Ainsi

$$f * r_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} f_{1/\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$$
$$f = \lambda f * r_\lambda$$

II D4 En dérivant le résultat de la question précédente et en appliquant la question IC2) (avec r et r' bornées) :

$$f' = (\lambda f * r_\lambda)' = \lambda f * (r_\lambda)'$$

Et en appliquant le IA 1)

$$\|f'\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \left\|(r_\lambda)'\right\|_1$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|(r_\lambda)'(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda r'(\lambda x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |r'(u)|\, du$$

pour conclure que

$$\|f'\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \|r'\|_1$$

ce qui donne bien l'inégalité de Bernstein avec $C = \|r'\|_1$ indépendant de f.