DM 9 : Mines PC 2022 solution

Q 1) a) Avec d'Alembert, pour $a_n = 1/n$, comme $a_{n+1}/a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on sait que le rayon de Cv de $\sum z^n/n$ est égal à 1.
b) Si z est un réel $x \in]-1,1[$, on sait d'après le cours que :

$$\forall\, x \in\ ]-1,1[,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n = L(x).$$

Ce résultat de cours s'obtient par Intégration terme à terme à partir du D.S.E. de $1/(1-x)$, ITT possible par convergence uniforme sur tous les intervalles $[0,x]$ (resp. $[x,0]$) pour $|x|<1$.

Q 2) Pour tout $t \in\ [-1,1]$, $|tz| \leq |z| < 1$ donc la série $\sum |tz|^n/n$ est convergente et $\Phi\ :\ t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n$ est la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $1/|z|$ donc par le cours elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1/|z|, 1/|z|[$ et en particulier sur $[-1,1]$ et la dérivée se calcule par dérivation terme à terme :

$$\forall\, t \in [-1,1],\ \Phi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = z\sum_{n=1}^{+\infty}(zt)^{n-1} = \frac{z}{1-zt}$$

Q 3) **N.B** Le programme de 1ère année dit que :

> **Propriété :** si $\Phi\ :\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable, alors la fonction $t \mapsto e^{\Phi(t)}$ est *dérivable* sur I, de dérivée $t \mapsto \Phi'(t)e^{\Phi(t)}$.

vous pouviez donc l'affirmer directement.
Par contre vous ne devez pas invoquer théorème de composition des fonctions dérivables avec la fonction $\exp\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *car le programme ne dit rien sur la dérivation par rapport à une variable complexe* , mais si on écrit $\Phi(t) = a(t) + ib(t)$, alors $e^{\Phi(t)} = e^{a(t)}(\cos(b(t)) + i\sin(b(t))$ et sous cette forme on peut appliquer les théorèmes de compositions (c'est la preuve du théorème encadrée que vous avez faite en première année).
Une autre façon, plus conceptuelle, en 2ème année de démontrer cette propriété est d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme pour $\sum \frac{\Phi(t)^n}{n!}$ dont la série dérivée $\sum \Phi'(t)\frac{\Phi(t)^{n-1}}{(n-1)!}$ converge normalement sur $[0,1]$ puisque les fonctions Φ et Φ' sont bornées sur $[0,1]$ et donc $|\Phi'(t)\frac{\Phi(t)^{n-1}}{(n-1)!}| \leq M_1\frac{M_0^{n-1}}{(n-1)!}$ T.G.S.C. $\square$
Ici donc $\forall\, t \in\ [0,1],\ \frac{d}{dt}(e^{\Phi(t)}) = \Phi'(t)e^{\Phi(t)}$.
Par théorème sur la dérivée d'un produit de deux fonctions à valeurs complexes :

$$\forall t \in [0,1], \quad \Psi'(t) = -ze^{\Phi(t)} + (1-tz)\Phi'(t)e^{\Phi(t)} \overset{(\dagger)}{=} \left(-z + (1-tz)\times\frac{z}{1-tz}\right)e^{\Phi(t)} = 0$$

Ainsi Ψ est de dérivée nulle sur l'intervalle $[0,1]$, donc Ψ est une application constante. On détermine la valeur de cette constante grâce à une évaluation en $t=0$:

$$\Psi(0) = (1 - 0\times z)e^{L(0\times z)} = e^{L(0)} \overset{(*)}{=} e^0 = 1$$

Ainsi :

$$\forall t \in [0,1], \quad \Psi(t) = 1$$

En particulier, pour $t=1$, on a $\Psi(1) = 1$, c'est-à-dire, en remplaçant $\Psi(1)$ par son expression explicite :

$$(1-z)\exp(L(z)) = 1$$

et donc :

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}$$

Q 4) Soit $z \in D$, on a $|z| \in [0,1[$,

$$|L(z)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} \overset{(*)}{=} -\ln(1-|z|),$$

avec $(*)$ vraie d'après la question 1.
Ceci démontre l'inégalité qu'on demandait.
Or, si $z \in D$, alors $z^n \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant |L(z^n)| \leqslant -\ln(1-|z^n|) = -\ln(1-|z|^n) \quad (**)$$

Montrons que la série $\sum_n -\ln(1-|z|^n)$ converge. On a : $|z|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car $|z|<1$, et donc :

$$-\ln(1-|z|^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^n > 0.$$

donc par théorème sur les équivalent pour les séries à termes positifs, $-\ln(1-|z|^n)$ est terme général de série convergente, et par la majoration $(**)$ c'est aussi le cas de $|L(z^n)|$.

Q 5) L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$, donc : $P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right] \neq 0$. De plus, pour tout entier $N \geqslant 1$ on a :

$$\exp\left[\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right] = \prod_{n=1}^{N} \exp(L(z^n)) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}. \tag{1}$$

la dernière égalité étant donnée par la Q3.
Quand $N \to +\infty$, le membre de gauche tend vers $P(z)$, par définition de P et continuité de l'exponentielle sur $\mathbf{C}$. Par conséquent :

$$P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$

Par la déf de $P(z) = \exp(\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n))$, appliqué à $z = e^{-t} \in]0,1[$, $P(e^{-t})) = \exp(\sum_{n=1}^{+\infty} L(e^{-nt}))$ avec une exp réelle, dont le ln est la fonction réciproque, donc

$$\forall\ t>0,\ \ln(P(e^{-t})) = \sum_{n=1}^{+\infty} L(e^{-nt}).$$

et par le résultat rappelé au 1) sur la fonction L en variable *réelle* :

$$\forall\ t>0,\ \ln(P(e^{-t})) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nt})$$

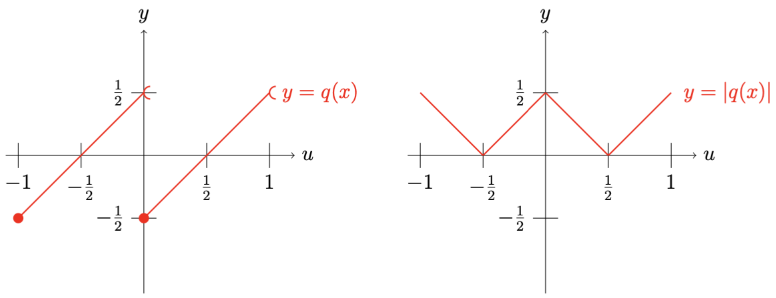
Q 6) On sait que la fonction « partie entière » est continue par morceaux. La fonction q est somme de fonctions continues par morceaux, donc elle est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$. De plus la fonction partie entière vérifie : $\forall x \in \mathbf{R}, \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, donc :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad q(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor - \frac{1}{2} = x+1-\lfloor x \rfloor - 1 - \frac{1}{2} = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = q(x),$$

donc q est 1 -périodique.
Remarque : la fonction 1-périodique $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ s'appelle aussi fonction « partie décimale » ou « partie fractionnaire ».
Il reste à montrer que la fonction $|q|$ est paire. Comme q est 1 -périodique, il suffit de démontrer que $|q(x)| = |q(-x)|$ pour tout $x \in [0,1[$. Pour $x=0$, il est évident que l'égalité est vraie, et on ne considère donc que $x \in]0,1[$. Or, pour un tel x, on a plus simplement : $q(x) = x - \frac{1}{2}$, et : $q(-x) = -x-(-1) - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2}$ (car : $-1 < -x < 0$). Afin de simplifier $|q(x)|$ et $|q(-x)|$, on traite deux cas :

— si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors $q(x) = x - \frac{1}{2} \leqslant 0$ et $q(-x) = -x + \frac{1}{2} \geqslant 0$, donc dans ce cas : $|q(x)| = -q(x) = -x + \frac{1}{2} = q(-x) = |q(-x)|$;

— si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, alors $q(x) = x - \frac{1}{2} \geqslant 0$ et $q(-x) = -x + \frac{1}{2} \leqslant 0$, donc dans ce cas : $|q(x)| = q(x) = x - \frac{1}{2} = -q(-x) = |q(-x)|$.



Dans tous les cas, on a $|q(x)| = |q(-x)|$, pour tout $x \in]0, 1[$, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$ d'après la réduction expliquée ci-dessus. Ainsi $|q|$ est bien une fonction paire, ce qu'il fallait démontrer.

Q 7) Soit $t > 0$. L'application $u \mapsto \left|\frac{q(u)}{e^{tu}-1}\right|$ est continue par morceaux sur $[\ 1, +\infty\ [$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (en fait $|q|$ est même continue comme on le voit sur le graphe ci-dessus).

Étudions l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$: l'écriture explicite donnée Q6 montre que $|q(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0, 1]$, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$ par 1 -périodicité. Par conséquent, pour tout $u \geqslant 1$ on a :

$$0 \leqslant \left|u^2 \frac{q(u)}{e^{tu} - 1}\right| \leqslant \frac{1}{2} \frac{u^2}{e^{tu} - 1} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0,$$

puisque : $\frac{u^2}{e^{tu}-1} \underset{u \to +\infty}{\sim} u^2 e^{-tu} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$ (théorème des croissances comparées). On en déduit :

$$\left|\frac{q(u)}{e^{tu} - 1}\right| = \underset{u \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

Par comparaison à l'exemple de Riemann, on conclut que $u \mapsto \frac{q(u)}{e^{tu}-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'où le résultat, pour tout $t > 0$.

Q 8) Avec la définition de q, on sait que :

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{q(u)}{u} du &= \int_1^n \frac{u}{u} du - \int_1^n \frac{\lfloor u \rfloor}{u} du - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{du}{u} \\ &= (n-1) - \int_1^n \frac{\lfloor u \rfloor}{u} du - \frac{1}{2} \ln(n) \end{aligned} \tag{2}$$

En découpant l'intégrale restante

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\lfloor u \rfloor}{u} du &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{u}\ du = \sum_{k=1}^{n-1} k(\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} (k-1) \ln(k) - \sum_{k=2}^{n-1} k \ln(k) \\ &= (n-1) \ln(n) + \sum_{k=2}^{n-1} ((k-1) - k) \ln(k) = n \ln(n) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \\ &= n \ln(n) - \ln(n!) \end{aligned} \tag{3}$$

Avec (2) et (3) on a bien montré que :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\ du = (n-1) + \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n)$$

ce qu'il fallait démontrer. La seconde égalité de l'énoncé s'obtient en écrivant : $n = \ln(e^n)$, et : $\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(n^n \sqrt{n}\right)$.

Q 9) Soit x au voisinage de $+\infty$. On a :

$$0 \leqslant \left| \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u \right| \leqslant \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{|q(u)|}{u} \, \mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2} \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor} \right).$$

Or on a : $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, donc : $1-\frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$. Par le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$. Et donc, par continuité du logarithme : $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x}\right) = \ln(1) = 0$. L'encadrement ci-dessus donne donc, par le théorème des gendarmes :

$$\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Voyons comment en déduire, avec la Q8, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u$ converge. D'abord, notons que la question précédente permet de démontrer que la *suite* $\left(\int_1^n \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 2}$ converge, puisque par la formule de Stirling :

$$\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$$

et donc, par continuité du logarithme :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

Alors, pour tout réel x au voisinage de $+\infty$, on se ramène au cas d'un paramètre entier avec la relation de Chasles :

$$\int_1^x \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u = \int_1^{\lfloor x \rfloor} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u + \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u$$

9. Soit x au voisinage de $+\infty$. On a :

$$0 \leqslant \left| \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u \right| \leqslant \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{|q(u)|}{u} \, \mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2} \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor} \right).$$

Or on a : $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, donc : $1-\frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$. Par le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$. Et donc, par continuité du logarithme : $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x}\right) = \ln(1) = 0$. L'encadrement ci-dessus donne donc, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u = 0$$

Voyons comment en déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u$ converge. D'abord, notons que la question précédente permet de démontrer que la suite $\left(\int_1^n \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 2}$ converge, puisque par la formule de Stirling :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

et donc, par continuité du logarithme :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

Alors, pour tout réel x au voisinage de $+\infty$, on se ramène au cas d'un paramètre entier avec la relation de Chasles :

$$\int_1^x \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u = \int_1^{\lfloor x \rfloor} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u + \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u} \, \mathrm{d}u$$

Comme $\lfloor x \rfloor \in \mathbf{N}$ tend vers l'infini quand $x \to +\infty$, ce qui précède montre que, par composition de limites : $\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\lfloor x \rfloor} \frac{q(u)}{u}\, \mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$. La seconde intégrale a une limite nulle quand $x \to +\infty$ d'après la résolution en début de question. Alors, en tant que somme de quantités ayant une limite finie, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{q(u)}{u}\, \mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + 0$$

Ceci démontre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\, \mathrm{d}u$ converge, et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\, \mathrm{d}u = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{q(u)}{u}\, \mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

Q 10) Pour tout $u > 0$ on a $e^{-u} \in]0,1[$, et donc, comme on l'a rappelé à la question 1 :

$$-\ln(1 - e^{-u}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nu}}{n}$$

Nous allons en déduire l'égalité de l'énoncé via une intégration terme à terme, que nous allons justifier en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue (ici dans le cas des fonctions positives). Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in]0, +\infty[, \quad f_n(u) = \frac{e^{-nu}}{n}.$$

Alors :

— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (c'est une fonction intégrable de référence) à valeurs **positives**,

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction continue par morceaux $u \mapsto -\ln(1 - e^{-u})$

D'après le théorème d'I.T.T. de Lebesgue dans le cas positif, on a l'égalité, dans $[0, +\infty]$.

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u$$

Or $\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} -\ln(1 - e^{-u})\, \mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

d'où le résultat demandé après multiplication par -1 .

Q 11) **(M1)** Suivant l'indication de l'énoncé, nous allons d'abord démontrer que l'application g : $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{e^{-x}x - (1 - e^{-x})}{x^2} = \frac{(1+x)e^{-x} - 1}{x^2}.$$

Or, par convexité de l'exp. on sait que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x \tag{**}$$

et donc : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, 1 \geqslant (1+x)e^{-x}$ ce dont on déduit : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, g'(x) \leqslant 0$. Ainsi g est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Ainsi g est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, donc $\ln \circ g$ également (on a bien $g > 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$, étant donné que $e^{-x} < 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, donc la composition avec le logarithme est bien définie).

On en déduit :
$$\forall t \in]0,1], \forall u \in]0,1], \quad \ln(g(t)) \leqslant \ln(g(tu)) \leqslant \lim_0 \ln \circ g.$$
La limite du membre de droite existe bien (et est finie), puisque pour tout x au voisinage de 0 :
$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1,$$
donc : $\lim_0 \ln \circ g = \ln(1) = 0$. Ceci démontre en passant que la fonction $\ln \circ g$ se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$, et donc qu'elle est intégrable sur $]0,1\,]$. Intégrons l'inégalité cidessus sur $]0,1\,]$, pour obtenir :
$$\forall t \in]0,1], \quad \int_0^1 \ln(g(t))\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \ln(g(tu))\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 0 \ \mathrm{d}u$$
c'est-à-dire :
$$\forall t \in]0,1], \quad \ln(g(t)) \leqslant \int_0^1 \ln(g(tu))\mathrm{d}u \leqslant 0$$
Comme on l'a vu ci-dessus, on a : $\lim_{t\to 0} \ln(g(t)) = 0$. Par conséquent, par le théorème des gendarmes, cet encadrement démontre qu'on a : $\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln(g(tu))\mathrm{d}u = 0$. On a donc démontré :
$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right)\mathrm{d}u = 0$$
Or :
$$\forall t > 0, \quad \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right)\mathrm{d}u + \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$$
donc : $\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u = [u\ln(u) - u]_0^1 = -1$. En conclusion :
$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = -1$$
(M2) (D'après une bonne idée d'Anaîs qui voulait utiliser un équivalent , avec un changement de variable et le théorème d'intégration des relations de comparaison qui n'est pas au programme de PC d'où l'indication je pense. En fait on a besoin d'un peu plus qu'un équivalent, d'un DL à deux termes.)
$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)du = \int_0^1 \ln(1-e^{-tu})du - \int_0^1 \ln(t)du = \int_0^1 \ln(1-e^{-tu})du - \ln(t) \qquad (4)$$
L'existence de ces intégrales est assurée si on montre que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-e^{-tu})du$ existe bien.
Or pour chaque $t > 0$, la fonction $u \mapsto \ln(1-e^{-tu})$ est continue sur $]0,1]$ et en 0,
$\ln(1-e^{-tu}) = \ln(tu + o(u)) = \ln(u) + \ln(t + o(1)) \underset{u\to 0}{\sim} \ln(u) = o(1/\sqrt{u})$ donc la fonction est intégrable par comparaison à l'exemple de Riemann.
Par changement de variable $v = tu$, donc $dt = dv/u$, on a :
$$\int_0^1 \ln(1-e^{-tu})du = \frac{1}{t}\int_0^t \ln(1-e^{-v})dv \qquad (5)$$
Or $\ln(1-e^{-v}) = \ln(v + O(v^2)) = \ln(v) + \ln(1+O(v)) = \ln(v) + \underset{v\to 0}{O}(v)$ et $v \in [0,t]$ est de signe constant donc par théorème d'intégration des relations de comparaison, appliqué aux restes d'intégrales convergentes, on a :
$$\int_0^t \ln(1-e^{-v})dv = \int_0^t \ln(v)dv + \underset{t\to 0}{O}(t^2) = t\ln(t) - t + \underset{t\to 0}{O}(t^2) \qquad (6)$$
Avec (6) dans (5) on a :
$$\int_0^1 \ln(1-e^{-tu})du = \ln(t) - 1 + \underset{t\to 0}{O}(t) \qquad (7)$$

Q 12) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note que u_k est une intégrale à paramètre. Montrons donc sa continuité sur $\mathbf{R}_+$en utilisant le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbf{R}_+, \quad v_k(u,t) = \begin{cases} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1} & \text{si } t > 0 \\ \frac{q(u)}{u} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Alors :

(H0) pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'application $u \mapsto v_k(u,t)$ est continue par morceaux sur $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ (car on a vu que q est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$).

(H1) pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$, la continuité de l'application $t \mapsto v_k(u,t)$ est évidente sur $\mathbf{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et on vérifie qu'elle est continue en 0 également par un calcul de limite :

$$\frac{tq(u)}{e^{tu}-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{tq(u)}{tu} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{q(u)}{u} = v_k(u,0)$$

donc $t \mapsto v_k(u,t)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$;

(H2) pour tout $(u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbf{R}_+$, on a :

$$|v_k(u,t)| \leqslant \frac{|q(u)|}{u};$$

en effet, pour $t = 0$ c'est évident, et pour $t > 0$ on utilise ($**$) (question précédente) pour obtenir :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbf{R}_+^*, \quad \frac{e^{tu}-1}{tu} \geqslant 1$$

et donc :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbf{R}_+^*, \quad |v_k(u,t)| = \frac{|q(u)|}{u} \times \frac{tu}{e^{tu}-1} \leqslant \frac{|q(u)|}{u}.$$

L'application $\varphi : u \mapsto \frac{|q(u)|}{u}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ si $k > 0$, donc elle y est intégrable. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée.

On en déduit, par le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre que l'application $u_k : t \mapsto \int_{k/2}^{(k+1)/2} v_k(u,t)\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbf{R}_+$: d'où le résultat.

Q 13) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{t}{e^{tu}-1} > 0$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$, le signe de l'intégrande de $u_k(t)$ ne dépend que du signe de q. Or l'expression de la fonction q montre que :

$$\forall x \in [0,1[, \quad \begin{cases} q(x) \leqslant 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ q(x) \geqslant 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Par 1-périodicité de q, on a donc :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = \begin{cases} -|q(x)| \leqslant 0 \text{ si } k \text{ est pair,} \\ \ \ |q(x)| \geqslant 0 \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

J'exclus les bornes pour éviter les distinctions de cas fastidieuses, et inutiles (car l'intégrale ignore les valeurs en les points isolés : il ne coûte donc rien d'étudier son signe en excluant les extrémités de l'intervalle d'intégration). On en déduit d'une part :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = (-1)^{k+1}|q(x)|$$

et d'autre part que, par croissance de l'intégrale : $u_k(t) \leqslant 0$ si k est pair, et $u_k(t) \geqslant 0$ si k est impair (on a en effet établi plus haut que le signe de l'intégrande est dicté par le signe de q). On a donc aussi, pour tenir compte de cette distinction de cas selon la parité de k :

$$u_k(t) = (-1)^{k+1}\,|u_k(t)|$$

(On note une erreur d'énoncé concernant l'exposant de -1). La première égalité demandée est alors immédiate :

$$|u_k(t)| = (-1)^{k+1}u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t(-1)^{k+1}q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u$$

Tout ce qui précède démontre que la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k(t)$ est alternée : montrons qu'il s'agit d'une série alternée spéciale autrement dit que $(|u_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro en décroissant.

— pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_k(t)| - |u_{k+1}(t)| &= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u - \int_{(k+1)/2}^{(k+2)/2} \frac{t[q(u)\,|}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(k+1-v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\,\mathrm{d}v \quad (v = k+1-u) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\,\mathrm{d}v \quad (|q|\text{1-pér. et paire }) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \underbrace{t|q(u)|}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\frac{1}{e^{tu}-1} - \frac{1}{e^{t(k+1-u)}-1}\right)}_{\geqslant 0}\mathrm{d}u \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

le signe du terme en facteur de $t|q(u)|$ découlant du fait que l'application $u \mapsto \frac{1}{e^{tu}-1}$ soit clairement décroissante (on a $u \leqslant k+1-u$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$) ; ceci montre que la suite $(|u_k(t)|)_{k\geqslant 1}$ est décroissante ;

— pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant |u_k(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\,\mathrm{d}u}{e^{tu}-1} \overset{(**)}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(1)}{2} = 0$$

donc par le théorème des gendarmes : $\lim_{k\to+\infty} |u_k(t)| = 0$.

Ainsi par le théorème des séries alternées spéciales, la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k(t)$ converge (ce qu'en fait, on pouvait déjà déduire de la question 7), et son reste est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant |u_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or, on sait que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n},$$

d'où le résultat.

Q 14) De la question précédente, il résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre que le reste de la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$vers la fonction nulle, et donc la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$. En tant que limite uniforme de fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$(question 12), la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$ est continue sur $\mathbf{R}_+$. La continuité sur $\mathbf{R}_+$implique en particulier que, quand $t \to 0^+$, on a :

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0)$$

Or, par la relation de Chasles :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u$$

et, par le même argument :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0) = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

Le calcul de limite ci-dessus se réécrit donc ainsi :

$$\lim_{t\to 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u \overset{[q.9]}{=} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

d'où le résultat.

Q 15) Soit $t > 0$. Sur chaque intervalle $[k, k+1[$, sachant que pour $u \in [k, k+1[$ $q(u) = u + k - 1/2$, on fait une I.P.P. dans $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1} du$ en posant

$$\begin{cases} v'(u) = \dfrac{t}{e^{tu}-1} \Leftarrow v(u) = \ln(1-e^{-tu}) \\ w('u) = q(u) \Rightarrow w'(u) = 1 \end{cases}$$

ce qui donne sachant $q(u) \underset{u\to(k+1)^-}{\longrightarrow} 1/2$ et $q(u) \underset{u\to k^+}{\longrightarrow} -1/2$ que :

$$\int_k^{k+1} \frac{q(u)t}{e^{tu}-1} du = \frac{1}{2}(\ln(1-e^{-(k+1)t}) + \ln(1-e^{-kt})) - \int_k^{k+1} \ln(1-e^{-tu}) du$$

En sommant ces intégrales, par relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-(k+1)t}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-kt}) - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu}) du \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1-e^{-t}) + \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-kt}) - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu}) du \end{aligned}$$

en regroupant les deux sommes.

Or par la Q5, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-kt}) = -\ln(P(e^{-t})$ donc on obtient bien

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$$

Q 16) Ainsi pour $t > 0$

$$\ln\left(P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\right) = -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

On regarde chaque terme :

- $\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right) \underset{t\to0^+}{=} \ln\left(t + O\left(t^2\right)\right) = \ln(t) + \ln(1+O(t)) = \ln(t) + O(t) = \ln(t) + o(1)$.
- Avec la question 14 : $\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\,\mathrm{d}u \underset{t\to0^+}{=} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + o(1)$.
- Avec la question 10 : $\int_1^{+\infty} \ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u \underset{v=tu}{=} \dfrac{1}{t}\int_t^{+\infty} \ln\left(1-\mathrm{e}^{-v}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6t} - \frac{1}{t}\int_0^t \ln\left(1-\mathrm{e}^{-v}\right)\mathrm{d}v$
  On a établi : $\ln\left(1-\mathrm{e}^{-v}\right) \underset{v\to0^+}{=} \ln(v) + O(v)$, donc avec ce majorant $v \geq 0$ par intégration des $O()$ appliquée aux restes d'intégrales convergentes, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t \ln(1-e^{-v}) dv &= \int_0^t \ln(v) dv + O(\int_0^t v dv) \\ &= t\ln(t) - t + O(t^2) \end{aligned}$$

On regroupe tout : $\ln\left(P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\right) = 1 - \frac{\ln(2\pi)}{2} - \frac{\ln(t)}{2} + \frac{\pi^2}{6t} + \ln(t) - 1 + o(1)$ et finalement :

$$\ln\left(P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\right) = -\frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{\ln(t)}{2} + \frac{\pi^2}{6t} + o(1).$$

C. Développement de P en série entière

Q 17) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. (i) Tout d'abord, $P_{n,N}$ est non vide, puisque $(n, 0, \dots, 0) \in P_{n,N}$.
(ii) Justifions que $P_{n,N}$ est inclus dans $[\![0, n]\!]^N$: soit $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}$. Alors pour tout $\ell \in [\![1, N]\!]$, $a_\ell \geq 0$ et

$$n = \sum_{k=1}^{n} k a_k \geq \ell a_\ell \geqslant a_\ell.$$

d'où l'inclusion demandée.
(iii) Montrons que la suite $(p_{n,N})_{N \geqslant 1}$ est croissante ; pour cela, il suffit de montrer qu'il existe une injection de $P_{n,N}$ dans $P_{n,N+1}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de considérer l'application :

$$\Phi_{n,N} : \begin{cases} P_{n,N} \longrightarrow P_{n,N+1} \\ (a_1, \dots, a_N) \longmapsto (a_1, \dots, a_N, 0), \end{cases}$$

Ceci vaut pour tout $N \geqslant 1$, donc la suite $(p_{n,N})_{N \geqslant 1}$ est croissante.
(iv) Il reste à justifier qu'elle est constante à partir du rang $n_0 = \max(n, 1)$:
• si $n = 0$, alors on a clairement $p_{0,N} = 1$ pour tout $N \geqslant 1 = \max(n, 1)$, vu que l'égalité $0 = \sum_{k=1}^{N} k a_k$ impose : $\forall k \in [\![1, N]\!], a_k = 0$ (somme de réels positifs).
• Supposons à présent $n \geqslant 1$. Montrons :

$$\forall N \geqslant \max(n, 1), \quad p_{n,N} = p_{n,N+1}$$

Pour cela, il suffit de démontrer que l'application $\Phi_{n,N}$ ci-dessus, en plus d'être injective, est surjective. Soit, donc, $(b_1, \dots, b_N, b_{N+1}) \in P_{n,N+1}$, on va montrer que le dernier coefficient b_{N+1} est nul. On a en effet, comme $(b_1, \dots, b_N, b_{N+1}) \in P_{n,N+1}$:

$$n = \sum_{k=1}^{N+1} k b_k = (N+1) b_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} k b_k.$$

Or $N + 1 \geqslant \max(n, 1) + 1 \geqslant n + 1 > n$. Par conséquent, si *par l'absurde* $b_{N+1} \neq 0$, alors $b_{N+1} \geqslant 1$ (c'est un entier naturel), et donc on aurait :

$$n = (N+1) b_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \underbrace{k b_k}_{\geqslant 0} \geqslant (N+1) b_{N+1} \geqslant N + 1 > n.$$

Contradiction. Ainsi $b_{N+1} = 0$ et $\Phi_{n,N}$ est bijective d'où l'égalité des cardinaux demandée.

Q 18) Pour $z \in D$ on a $|z^N| < 1$ donc : $\frac{1}{1-z^N} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{Nk}$. On a donc le résultat voulu avec :

$$a_{n,N} = 0 \text{ si } n \text{ n'est pas un multiple de } N \text{ et } a_{n,N} = 1 \text{ sinon.}$$

Soit $z \in D$. Appelons $H(N)$ la propriété : [la série $\sum_n p_{n,N} z^n$ est absolument convergente et $\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$],
• Pour $N = 1$: on a $P_{n,1} = \{(n)\}$ donc $p_{n,1} = 1$ et la série $\sum_{n \geq 1} p_{n,1} z^n$ est absolument convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, donc $H(1)$ est vraie.
• Supposons $H(N)$ vraie pour un $N \geq 1$. On a alors :

$$\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N+1} z^n \right).$$

Les deux séries sont absolument convergentes : celle de gauche par hypothèse de récurrence et celle de droite car c'est la série géométrique de raison $|z^N| < 1$. Donc par produit de Cauchy :

$$\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_{k,N} a_{n-k,N+1} \right) z^n$$

Or on a la réunion disjointe :

$$\begin{aligned}P_{n,N+1} &= \left\{(a_1,\dots,a_{N+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}, \sum_{k=1}^{N+1} ka_k = n\right\}\\ &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{(a_1,\dots,a_N,i), (a_1,\dots,a_N) \in \mathbb{N}^N \text{ et } \sum_{k=1}^{N} ka_k = n-(N+1)i\right\}\end{aligned}$$

Or pour $i \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{card}\left\{(a_1,\dots,a_N,i), (a_1,\dots,a_N) \in \mathbb{N}^N \text{ et } \sum_{k=1}^{N} ka_k = n-(N+1)i\right\} = \begin{cases} 0 \text{ si } n-(N+1)i < 0 \\ p_{n-(N+1)i} \text{ sinon}\end{cases}$$

Ainsi :

$$p_{n,N+1} = \sum_{0\le i\le n/(N+1)} p_{n-(N+1)i,N} = \sum_{j=0}^{n} p_{j,N}a_{n-j,N+1}$$

où on a posé $j = n-(N+1)i$: $j \in [\![0,n]\!]$ et le terme $p_{j,N}$ est neutralisé par $a_{n-j,N+1}$ lorsque $n-j$ n'est pas un multiple de $N+1$. Finalement on a bien $\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N+1}z^n$ et $H(N+1)$ est vraie.

La récurrence est établie.

Q 19) Pour comprendre comment la fonction P de la première partie arrive ici, il faut se souvenir qu'à la Q5, on a montré que pour tout $z \in D$,

$$P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-z^n} = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n} \quad \text{produit convergent}$$

Or par la question précédente :

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N}z^n$$

Pour $z = x \in [0,1[$ réel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1-x^n} \ge 1$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$;

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-x^n} \le \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-x^n}$$

autrement dit

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ 0 \le \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N}x^n \le P(x) < +\infty$$

En particulier,

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ 0 \le \sum_{n=0}^{N} p_{n,N}x^n \le P(x) < +\infty$$

Mais on sait que pour $N \ge n$, $p_{n,N} = p_n$, donc

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ 0 \le \sum_{n=0}^{N} p_n x^n \le P(x) < +\infty$$

Ceci montre que pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum p_n x^n$ converge, donc que le rayon de convergence de $\sum p_n x^n$ est au moins de 1. D'autre part pour $x = 1$ la série $\sum p_n$ diverge grossièrement car $p_n \ge 1$ pour tout n.

Donc le rayon de convergence est exactement 1.

Q 20) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ On rappelle que d'après la question 17 , on a $p_n = p_{n,N}$ pour tout $n \leq N$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (p_n - p_{n,N})\, z^n. \tag{8}$$

On a donc, d'après l'inégalité triangulaire, et du fait que $p_n \geqslant p_{n,N}$ et $p_{n,N} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leqslant \left|\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |p_n - p_{n,N}| \cdot |z|^n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (p_n - p_{n,N})\, |z|^n \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n$$

Comme $|z| < 1$, d'après la question précédente la série $\sum_{n\geqslant 0} p_n |z|^n$ converge, donc son reste converge vers 0, autrement dit :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n = 0$$

Et donc, par la majoration (8) :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$$

Mais on a aussi :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \overset{(q.18)}{=} \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} \overset{(q.5)}{=} P(z)$$

Donc, par unicité de la limite :

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$$

N.B. On a enfin justifié ce qui était annoncé au début du sujet. La fonction P est la somme de la série génératrice associée à la suite (p_n). Depuis Euler on sait qu'on peut apprendre beaucoup sur une suite via cette série génératrice

Q 21) Il s'agit en fait d'un résultat très standard de récupération des coefficients d'un D.S.E d'une fonction $z \mapsto f(z)$ comme les coefficients de Fourier complexe de $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$. Ici le e^{-t} permet juste d'assurer que $\theta \mapsto e^{-t}e^{i\theta} = re^{i\theta}$ avec $r < 1$.

Précisément : pour $t > 0$ on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta - kt}\, \mathrm{d}\theta$$

Or $\left|p_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta-kt}\right| = p_k \mathrm{e}^{-kt}$ et $\mathrm{e}^{-t} \in [0,1[$ et on a vu que la série entière $\sum_k p_k x^k$ est de rayon de convergence 1. Donc la série numérique $\sum_k p_k \mathrm{e}^{-kt}$ converge et la série de fonctions (de la variable θ) $\sum_k p_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta-kt}$ converge normalement sur le segment $[-\pi, \pi]$.

Donc par Intégration Terme à Terme sur un segment,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \mathrm{e}^{-kt} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta} \mathrm{d}\theta$$

Or $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta} \mathrm{d}\theta = 0$ pour $k \neq n$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi$ sinon. Il reste donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta = 2\pi p_n \mathrm{e}^{-nt}$$

et finalement :

$$p_n = \frac{\mathrm{e}^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{e}^{nt} P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta$$

en multipliant en haut en bas par $P(e^{-t})$ suivant la fantaisie de l'énoncé dont on se dit qu'elle doit servir à qq chose plus loin.

Q 22) Avec la Q3, on sait que pour $z \in D$ on a

$$\frac{1}{1-z} = \exp(L(z))$$

Comme $x \in [0,1[$ on a $x \in D$ et $x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in D$, donc $1-x = \exp(-L(x))$ et $\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \exp\left(L\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)$. Ainsi au total on peut écrire :

$$\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \exp\left(L\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - L(x)\right)$$

en passant au module

$$\left|\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| = \exp\left(\mathrm{Re}\left(L\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - L(x)\right)\right). \tag{9}$$

Or

$$\mathrm{Re}\left(L\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n\cos(n\theta)}{n}$$

tandis que

$$\mathrm{Re}(L(x)) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

ce qui dans (9) donne :

$$\left|\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)-1}{n} x^n\right)$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)-1}{n} x^n = x(\cos(\theta)-1) + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)-1}{n}}_{\leq 0} x^n$$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)-1}{n} x^n \leq \cos(\theta) - 1$ et finalement : $\left|\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| \leq \exp((\cos(\theta)-1)x)$.

Q 23) - Toujours sous les hypothèses de l'énoncé on a :

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x\cos(\theta)}{1+x^2-2x\cos(\theta)} = \frac{x^2(1-\cos(\theta)) + x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left(1+x^2-2x\cos(\theta)\right)}$$

Le dénominateur est positif car $1+x^2-2x\cos(\theta) = \left|1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2$ et $x^2(1-\cos(\theta)) \geq 0$. On a donc bien en réarrangeant le dénominateur : $\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) \geq \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)))}$ Il s'en suit que $\left|\frac{P(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\frac{-x(1-\cos(\theta))}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)))}\right)$. On suppose désormais que $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

- 1^{er} cas : si $(1-x)^2 \leq x(1-\cos(\theta))$

Alors $(1-x)^2 + 2x(1-\cos(\theta)) \leq 3x(1-\cos(\theta))$ et sachant $\frac{-x(1-\cos(\theta))}{1-x} \leq 0$ on en déduit $\left|\frac{P(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\frac{-1}{3(1-x)}\right)$.

- $2^{\text{ième}}$ cas : si $(1-x)^2 \geq x(1-\cos(\theta))$

Alors $(1-x)^2 + 2x(1-\cos(\theta)) \leq 3(1-x)^2$ et de même $\left|\frac{P(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\frac{-x(1-\cos(\theta))}{3(1-x)^3}\right)$ Or $-x \leq -\frac{1}{2}$ ce qui permet de conclure : $\left|\frac{P(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\frac{-(1-\cos(\theta))}{6(1-x)^3}\right)$. L'alternative de l'énoncé est donc bien établie

Q 24) - Regardons la fonction $f : \theta \mapsto \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2}$ prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$; alors f est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ et admet un minimum $\alpha = f(\theta_0)$ sur ce segment. Donc $\forall \theta \in [-\pi,\pi], f(\theta) \geq \alpha$. En outre pour $\theta \in [-\pi,\pi]$ et $\theta \neq 0$ on a $1-\cos(\theta) > 0$ et $f(\theta) > 0$ et par ailleurs $f(0) > 0$, donc $\alpha = f(\theta_0) > 0$ et finalement :

On a bien trouvé $\alpha > 0$ tel que $\forall \theta \in [-\pi,\pi], 1-\cos(\theta) \geq \alpha\theta^2$.

Donc pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $x \geq \frac{1}{2}$ on a en reprenant l'alternative précédente :

$$\left|\frac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\frac{-1}{3(1-x)}\right) \text{ ou } \left|\frac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\frac{-(1-\cos(\theta))}{6(1-x)^3}\right) \leq \exp\left(\frac{-\alpha\theta^2}{6(1-x)^3}\right)$$

Donc en particulier pour $t_0 = \ln(2)$ et $t \in]0, t_0]$ on a $\mathrm{e}^{-t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, donc l'alternative devient :

$$\left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-1}{3\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)}\right) \text{ ou } \left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-\alpha\theta^2}{6\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^3}\right)$$

On rappelle que $\mathrm{e}^{-t} \geq 1 - t$ et donc que $t \geq 1 - \mathrm{e}^{-t} > 0$ donc :

$$\left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-1}{3t}\right) \text{ ou } \left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-\alpha\theta^2}{6t^3}\right)$$

- Dans le premier cas, on utilise que $\frac{|\theta|}{\pi} \leq 1$ pour écrire :

$$\left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-|\theta|^{2/3}}{3\pi^{2/3}t}\right) = \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}\theta|\right)^{2/3}} \text{ avec } \gamma = \frac{1}{3\pi^{2/3}}$$

- Dans le second cas : $\left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-\alpha\theta^2}{6t^3}\right) = \mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}$ avec $\beta = \frac{\alpha}{6}$

On a donc bien les inégalités voulues.

Q 25) 25 - On a ainsi l'inégalité toujours valide pour $0 < t < t_0$: $\left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}\theta\right)\|^{2/3}}$.

De là : $\left|\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \mathrm{d}\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}\theta\right)\right)^{2/3}}\right) \mathrm{d}\theta$ On utilise la parité (pour se débarrasser de la valeur absolue) et on fait le changement de variable affine $x = t^{-3/2}\theta$:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta\right| \leq 2\int_0^{\pi} \left(\mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}\theta\right)\right)^{2/3}}\right) \mathrm{d}\theta = 2t^{3/2} \int_0^{\pi t^{3/2}} \left(\mathrm{e}^{-\beta x^2} + \mathrm{e}^{-\gamma x^{2/3}}\right) \mathrm{d}x$$

Par positivité de la fonction intégrée on a donc pour $0 < t < t_0$:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta\right| \leq 2t^{3/2} \int_0^{\pi t_0^{3/2}} \left(\mathrm{e}^{-\beta x^2} + \mathrm{e}^{-\gamma x^{2/3}}\right) \mathrm{d}x$$

L'intégrale résiduelle ne dépend plus de t et cette majoration montre donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta \underset{t\to0^+}{=} O\left(t^{3/2}\right)$$

Q 26) 26 - Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{6n}} = 0^+$on a donc $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta n} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right)} \mathrm{d}\theta \underset{t\to0^+}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)$. Par ailleurs comme $\frac{\pi}{\sqrt{6n}} > 0$ on peut écrire (1) avec $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ et on obtient :

$$p_n = \frac{\mathrm{e}^{\pi\sqrt{n}/\sqrt{6}} P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right)} \mathrm{d}\theta \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{n}/\sqrt{6}} P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right) O\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)$$

On utilise alors la question 16 : $P\left(\mathrm{e}^{-t}\right) \underset{t\to0^+}{\sim} \mathrm{e}^{\pi^2/6t}\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{t\to0^+}{=} O\left(\mathrm{e}^{\pi^2/6t}\sqrt{t}\right)$. Donc

$$P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\mathrm{e}^{\pi\sqrt{n}/\sqrt{6}} n^{-1/4}\right)$$

On regroupe tout : $p_n = O\left(\frac{\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{n}/\sqrt{6}} n^{-1/4}}{n^{3/4}}\right) = O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right)$.CQFD.