DM 8 : rayon de Bohr Mines PC 2013

Q 1) Par déf. :

$$c_n(H_r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}d\theta.$$

Or si on pose $u_k : \theta \mapsto a_k r^k e^{i(k-n)\theta}$, on remarque que $\|u_n\|_\infty = \sup_{\theta\in[-\pi,\pi]}|u_n(\theta)| = |a_k|r^k$.
Il y a donc convergence normale de la série de fonction $\sum u_n$ sur le segment $[-\pi,\pi]$ puisque la série $(\sum |a_k|r^k)$ converge grâce à l'hypothèse $0<r<1$ et (H1).
En particulier la série de fonctions $\sum u_n$ CvU sur le segment $[-\pi,\pi]$, on peut donc intégrer terme à terme sur le segment $[-\pi,\pi]$:

$$c_n(H_r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}d\theta.$$

Or on sait que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}d\theta = \delta_{k,n}$$

On obtient donc :

$$\boxed{c_n(H_r) = 0 \text{ si } n<0 \text{ et } c_n(H_r) = a_n r^n \text{ si } n\geqslant 0.}$$

De même,

$$c_n\left(\overline{H_r}\right) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \overline{a_k} r^k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+n)\theta}d\theta$$

donne :

$$\boxed{c_n\left(\overline{H_r}\right) = 0 \text{ si } n>0 \text{ et } c_n\left(\overline{H_r}\right) = \overline{a_{-n}}r^{-n} \text{ si } n\leqslant 0.}$$

Q 2) De l'égalité : $\forall z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ on déduit ici :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)e^{-in\theta}d\theta &\overset{déf}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathfrak{Re}\left(H_r(\theta)\right)e^{-in\theta}d\theta\\
&\overset{cf.\ (*)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(H_r(\theta)+\overline{H_r(\theta)})e^{-in\theta}d\theta\\
&\overset{déf}{=} c_n(H_r)+c_n(\overline{H_r})\\
&= \begin{cases} a_n r^n \text{ si } n>0,\\ \overline{a_{-n}}r^{-n} \quad \text{si } n<0,\\ a_0+\overline{a_0} \text{ si } n=0.\end{cases} \qquad \text{par Q1.}
\end{aligned}$$

Q 3) Par la question précédente pour $n=0$, on sait que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)d\theta = a_0+\overline{a_0} = 2a_0 \quad \text{pour } a_0\in\mathbb{R},$$

ce qui est donné par (H2).

Q 4) On va montrer l'inégalité demandée en allant de droite à gauche :
Puisque $r<1$, la fonction $\theta\mapsto \mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta)}\right)\right)$ est continue donc bornée par M sur $[-\pi,\pi]$. En posant $u_n(\theta) = \mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta)}\right)\right)\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)$, on a donc :

$$\forall n\in\ \mathbb{N},\ \forall\theta\in[-\pi,\pi],\ |u_n(\theta)|\leqslant M\tau^n$$

et il y a convergence normale sur $[-\pi,\pi]$ de la série de fonctions $(\sum u_n)$. On peut donc intégrer terme à terme sur le segment $[-\pi,\pi]$ pour obtenir :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n\geqslant1}\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)\right)d\theta \overset{ITT\ et\ Q3}{=} a_0+\frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant1}\tau^n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)\cos(n\theta+\varphi_n)\,d\theta$$

Avec $\cos(n\theta+\varphi_n) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} + \mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_n}\right)$ on déduit pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)\cos(n\theta+\varphi_n)\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)\mathrm{e}^{in\theta}d\theta e^{\mathrm{i}\varphi_n} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)\mathrm{e}^{-in\theta}d\theta e^{-\mathrm{i}\varphi_n}\\
&= \frac{1}{2}\left(\overline{a_n}r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} + a_n r^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_n}\right) \text{ par } Q2 \text{ appliquée à } -n \text{ et } n\\
&= r^n|a_n| \text{ puisque } a_n = |a_n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}
\end{aligned}$$

On obtient bien

$$a_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\tau^n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)\cos(n\theta+\varphi_n)\,d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|\tau^n r^n$$

puisque $a_0 = |a_0|$ ce qui donne bien l'égalité demandée.

Q 5) a) Pour $0 < \tau \leqslant \frac{1}{3}$ on a $|\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)| \leqslant \frac{1}{3^n}$ donc

$$\sum_{n\geqslant 1}|\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)| \leqslant \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

et par suite

$$\frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n) \geqslant 0.$$

b) Si on note encore $M = \max_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}\left|\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)\right|$ on déduit de la Q4 que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{N}}|a_n|\tau^n r^n &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}M\left|\frac{1}{2}+\sum_{n\geqslant 1}\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)\right|d\theta\\
&= \frac{M}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n\geqslant 1}\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)\right)d\theta\\
&= M + M\sum_{n=1}^{+\infty}\tau^n\int_{\pi}^{\pi}\cos(n\theta+\varphi_n)d\theta
\end{aligned}$$

puisqu'on peut intégrer terme à terme (il y a convergence normale de la série de terme général $\tau^n\cos(n\theta+\varphi_n)$) et comme de plus

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta+\varphi_n)\,d\theta = \left[\frac{\sin(n\theta+\varphi_n)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ pour } n \geqslant 1$$

on conclut que :

$$\sum_{n\in\mathbf{N}}|a_n|\tau^n r^n \quad \leqslant M$$

Q 6) Puisque h vérifie (H1) et (H2), on peut lui appliquer la Q5 et avec H3 on sait que pour tout $r < 1$ le $M = \max_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}\left|\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)\right|$, vérifie $M \leq 1$.
Donc pour $\tau = \frac{1}{3}$ et tout $r \in [0,1[$,

$$\sum_{n\in\mathbf{N}}|a_n|\frac{1}{3^n}r^n \leqslant \max_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}\left|\mathrm{Re}\left(h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)\right| \leqslant 1. \quad (*)$$

Puique le rayon de convergence est au moins égal à 1 il y a continuité de $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n z^n|$ sur le disque $D(0,1)$ (car on a CvN sur tout disque $D(0,r)$ avec $r < 1$) et donc en particulier sur le disque fermé de rayon $\frac{1}{3}$ et on peut faire tendre r vers 1 dans $(*)$ On obtient donc :

$$\forall\ |z| \leqslant \frac{1}{3},\ \sum_{n\in\mathbf{N}}|a_n||z|^n \leqslant 1.$$

Q 7) Remarque : on va obtenir le résultat pour tout $|z| \leqslant \frac{1}{3}$.
Le problème est que f vérifie l'hypothèse (H1) mais pas (H2).
Posons $b_0 = |b_0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ et $h(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f(z)$,alors h vérifie les hypothèses (H1) et (H2) puisque $b_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ est un réel positif. Pour $|z| < 1, |\operatorname{Re}(h(z))| \leqslant |h(z)| = |f(z)| \leqslant 1$ donc h vérifie aussi (H3). On a donc par la question 6 : $\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|\,|z|^n \leqslant 1$ pour $|z| \leqslant \frac{1}{3}$ et la conclusion car $|a_n| = |b_n|$.

Q 8) (i) Pour que $f_\lambda(z)$ soit défini pour $|z| < 1$ il faut et il suffit que $\lambda \leqslant 1$ (sinon $z = \frac{1}{\lambda}$ donnerait une contradiction).

(ii) Pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, pour tout $z \in D(0, 1/\lambda)$, $\dfrac{1}{1-\lambda z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda z)^n$ donc f_λ est D.S.E. sur le disque $D(0, 1/\lambda)$ en particulier sur $D(0,1)$ donc f_λ vérifie (H1).

(iii) De plus, quand $|z| < 1$, en posant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:
$|f_\lambda(z)| \leqslant 1 \Leftrightarrow |z-\lambda|^2 \leqslant |1-\lambda z|^2 \Leftrightarrow (x-\lambda)^2 + y^2 \leqslant (1-\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 \Leftrightarrow \left(1-\lambda^2\right)\left(x^2+y^2-1\right) \leqslant 0$ qui est bien vérifié.

Donc f_λ vérifie (H1) et (H4) si $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ (et réciproquement on a vu au début que cette condition était nécessaire pour que f_λ soit bien définie sur $D(0,1)$).

Q 9) Pour $|z| < 1, f_\lambda(z) = (z-\lambda)\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n z^n = -\lambda + \sum_{n\geqslant 1} \left(1-\lambda^2\right)\lambda^{n-1} z^n$.
On a donc $b_0(\lambda) = -\lambda$ et pour $n \geqslant 1$: $b_n(\lambda) = \left(1-\lambda^2\right)\lambda^{n-1}$.
Ainsi :

$$\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda)|\,|z|^n = \lambda + \left(1-\lambda^2\right)\sum_{n\geqslant 1} \lambda^{n-1}|z|^n = \lambda + \left(1-\lambda^2\right)\frac{|z|}{1-\lambda|z|} \qquad (*)$$

Donc avec $(*)$, on voit que :
- si $\lambda = 1, \sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda)|\,|z|^n = 1$ pour tout z.
- Si $0 \leqslant \lambda < 1$:

$$\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda)|\,|z|^n \leqslant 1 \Leftrightarrow \left(1-\lambda^2\right)\frac{|z|}{1-\lambda|z|} \leqslant 1-\lambda \Leftrightarrow (1+\lambda)\frac{|z|}{1-\lambda|z|} \leqslant 1 \Leftrightarrow (1+2\lambda)|z| \leqslant 1$$

Donc $\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda)|\,|z|^n \leqslant 1$ si et seulement si $|z| \leqslant \frac{1}{1+2\lambda}$.

Q 10) Si $|z| \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$, par stricte décroissance de $\lambda \mapsto 1/(1+2\lambda)$ il existe $\lambda_0 \in \left]0,1\right[$ tel que $\frac{1}{1+2\lambda_0} < |z|$ et donc par Q9 $\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda_0)|\,|z|^n > 1$.

Q 11) f_{λ_0} vérifie (H1) et (H4) mais $\sum_{n\geqslant 0} |b_n(\lambda_0)|\,|z|^n \leqslant 1$ n'est pas vérifiée pour $|z| > \frac{1}{3}$. La constante $\frac{1}{3}$ ne peut donc pas être remplaçée par un réel plus grand.

Q 12) Quand $0 < r < 1$ il y a convergence absolue pour $f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n r^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}$ et $\overline{g\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)} = \sum_{n\in\mathbf{N}} \overline{c_n} r^n r\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}$. La série produit de Cauchy converge donc aussi absolument :

$$f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\overline{g\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)} = \sum_{n\in\mathbf{N}} r^n \sum_{k=0}^{n} b_k \overline{c_{n-k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta}$$

Par suite la série de fonctions de terme général $u_n(\theta) = r^n \sum_{k=0}^{n} b_k \overline{c_{n-k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta}$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$ car le module des termes généraux ne dépend pas de θ.
Donc par I.T.T. sur un segment :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\overline{g\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)} d\theta = \sum_{n\in\mathbf{N}} r^n \sum_{k=0}^{n} b_k \overline{c_{n-k}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta} d\theta.$$

Mais $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta} d\theta$ est nul si $2k \neq n$ et vaut 2π si $n = 2k$.
On a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\overline{g\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)} d\theta = \sum_{k\in\mathbf{N}} r^{2k} b_k \overline{c_k}.$$

Q 13) On déduit de la question 12 en prenant $g = f$, que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{n\in\mathbf{N}} r^{2n} |b_n|^2$$

Comme $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant 1$ puisque $0 < r < 1$ et que f vérifie (H4) on a $\sum_{n\in\mathbf{N}} r^{2n}\left|b_n\right|^2 \leqslant 1$ et ceci pour tout $r < 1$ d'où

$$|||f||| \leqslant 1.$$

Q 14) Si f vérifie (H1) on sait par la question 12 que :

$$|||f|||^2 = \sup_{0\leqslant r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta.$$

En remplaçant f par $A_f(\psi) = f\psi$ qui vérifie aussi (H1) on obtient

$$||||A_f(\psi)|||^2 = \sup_{0\leqslant r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f\left(re^{i\theta}\right)\psi\left(re^{i\theta}\right)|^2 d\theta \leqslant |||\psi|||^2$$

puisque $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant 1$ comme f vérifie (H4).

Si $A_f(\psi)(z) = f(z)\psi(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}} c_k z^k$, on sait par définition de P_n que :

$$P_n \circ A_f(\psi) = g_n \text{ avec } g_n(z) = c_0 + c_n z^n.$$

Donc par définition de la norme triple ici :

$$|||||P_n \circ A_f(\psi)|||^2 = \sup_{0\leqslant r<1}\left(c_0^2 + c_n^2 r^{2n}\right) \leqslant \sup_{0\leqslant r<1} \sum_{k\in\mathbf{N}} r^{2k} c_k^2 = |||A_f(\psi)|||^2 \leqslant |||\psi|||^2$$

Q 15) Si $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ et $f(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}} b_k z^k$ on a

$$A_f(\psi)(z) = (\alpha + \beta z^n)\,(\sum_{k\in\mathbf{N}} b_k z^k) = \alpha b_0 + \ldots + (\alpha b_n + \beta b_0)\, z^n + \ldots$$

donc

$$P_n \circ A_f(\psi)(z) = \alpha b_0 + (\alpha b_n + \beta b_0)\, z^n$$

Par suite $S \circ P_n \circ A_f(\psi) = \binom{\alpha b_0}{\alpha b_n + \beta b_0}$ d'où la matrice $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ b_n & b_0 \end{pmatrix}$.

Q 16) Cette propriété n'est pas spécifique à la matrice $\mathbb{D}$ de l'énoncé mais complètement générale (cf. cours du chapitre R4).

En notation plus usuelle que celle de l'énoncé, si X, Y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ identifié à $M_{2,1}(\mathbb{R})$ ici alors :

$$(X|Y) = X^\top.Y$$

Mais alors avec $X = \Psi$ et $Y = \mathbb{D}\Theta$: et donc on a :

$$(\Psi|\mathbb{D}\Theta) = \Psi^\top.(\mathbb{D}\Theta)$$

mais par symétrie du produit scalaire ;

$$(\Psi|\mathbb{D}\Theta) = (\mathbb{D}\Theta|\Psi) = (\mathbb{D}\Theta)^\top.\Psi = \Theta^\top\mathbb{D}^\top\Psi = (\Theta|\mathbb{D}^\top\Psi) = (\mathbb{D}^\top\Psi|\Theta)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q 17) a) Une remarque cruciale pour la suite : pour $\psi \in \mathcal{V}_n$, $z \mapsto \alpha + \beta z^n$ où α et β appartiennent à $\mathbf{R}$, on a :

$$|||\psi||| \overset{def}{=} \sup_{r<1} |\alpha^2 + \beta^2 b r^{2n}|^{1/2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = ||\Psi||;$$

avec $\Psi = S(\psi)$.

Autrement dit S est une isométrie entre la norme $|||\ |||$ dans $\mathcal{V}_n$et la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$.

Mais alors par définition de $\mathbb{D}$ comme matrice de $S\circ P_n\circ A_f\circ S^{-1}$, on calcule pour $\Psi = \binom{\alpha}{\beta}$:

$$\begin{aligned}(\mathbb{D}^\intercal\mathbb{D}\Psi \mid \Psi) = (\mathbb{D}\Psi \mid \mathbb{D}\Psi) &= \left\|S\circ P_n\circ A_f\circ S^{-1}(\Psi)\right\|^2\\ &= |||P_n\circ A_f\circ S^{-1}(\Psi)|||^2 \quad \text{par } S \text{ isométrique}\\ &\leqslant |||S^{-1}(\Psi)|||^2 \quad \text{par Q 14 appliquée à } \psi = S^{-1}(\Psi)\\ &= \|\Psi\|^2 \quad \text{par } S \text{ isométrique}\end{aligned}$$

donc pour tout $\Psi\in\mathbb{R}^2$,

$$(A\Psi \mid \Psi) = (\Psi \mid \Psi) - \left(\mathbb{D}^\intercal\mathbb{D}\Psi \mid \Psi\right) = \|\Psi\|^2 - \|\mathbb{D}\Psi\|^2 \geqslant 0$$

ce qui signifie que la matrice A est positive.
b) Avec la forme explicite de la matrice $\mathbb{D}$ vue à la Q15, on peut calculer :

$$\|\mathbb{D}\Psi\|^2 = (\alpha b_0)^2 + (\alpha b_n + \beta b_0)^2$$

Donc l'inégalité du a) dit que pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$;

$$(\alpha b_0)^2 + (\alpha b_n + \beta b_0)^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$$

En prenant $\Psi = \binom{1}{0}$ on obtient $b_0^2 + b_n^2 \leqslant 1$ donc $\boxed{b_0^2 \leqslant 1}$.
c) Ce sera encore un résultat de cours du chap. R4 sur les matrices symétriques positives.
Si λ est une valeur propre de A, il existe $\Psi \neq 0$ tel que $A\Psi = \lambda\Psi$.
Alors

$$(A\Psi \mid \Psi) = \lambda(\Psi \mid \Psi) \quad (1)$$

et comme A est *positive*, on sait que pour tout Ψ, $(A\Psi \mid \Psi) \geq 0$ donc avec (1), comme $(\Psi \mid \Psi) > 0$ on obtient $\lambda \geqslant 0$: les valeurs propres de la matrice symétrique A sont des réels positifs ou nuls.

Q 18) On calcule $A = I_2 - \mathbb{D}^\intercal\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1-b_0^2-b_n^2 & -b_0b_n \\ -b_0b_n & 1-b_0^2\end{pmatrix}$ donc

$$\det(A) = \left(1-b_0^2-b_n^2\right)\left(1-b_0^2\right) - (b_0b_n)^2 = \left(1-b_0^2\right)^2 - b_n^2 \geqslant 0$$

puisque $\det(A)$ est égal au produit des valeurs propres de A. On a donc $|b_n| \leqslant 1-b_0^2$ puisqu'on a vu à la question précédente que $b_0^2 \leq 1$.

Q 19) De la question 18 on déduit pour $|z|<1$:

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|\,|z|^n \leqslant |b_0| + \sum_{n\geqslant 1}\left(1-b_0^2\right)|z|^n = |b_0| + \left(1-b_0^2\right)\frac{|z|}{1-|z|} \leqslant M(|z|)$$

par définition de M (puisque $t = |b_0|$ vérifie bien $0 \leqslant |b_0| \leqslant 1$).

Q 20) Si $r=0$ on a $M(0)=1$.
Pour $0<r<1$ étudions $g(t) = t + \left(1-t^2\right)\frac{r}{1-r}$ sur $[0,1]$. Or $g'(t) = 1 - 2t\frac{r}{1-r}$ s'annule quand $t = \frac{1-r}{2r}$. Or $\frac{1-r}{2r} \leqslant 1 \Leftrightarrow r \geqslant \frac{1}{3}$.
Donc si $r \leqslant \frac{1}{3}$ alors $\forall\, t\in[0,1]$, $g'(t) \geqslant 0$ donc g est croissante et $M(r) = g(1) = 1$.
En revanche, si $r > \frac{1}{3}$ alors g atteint son maximum en $t_0 = \frac{1-r}{2r}$ donc $M(r) = g\left(\frac{1-r}{2r}\right) = \frac{1-2r+5r^2}{4r(1-r)}$.

Q 21) a) Il y a une coquille dans l'énoncé du concours : il fallait supposer $|z|<1-\varepsilon$ sinon l'inégalité demandée n'a pas de sens vue la racine carrée de $1-\frac{|z|^2}{|1-\varepsilon|^2}$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\sum_{n=0}^{N}|b_nz^n|\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{N}\left|b_n(1-\varepsilon)^n\frac{z^n}{(1-\varepsilon)^n}\right|\right)^2 \leqslant \sum_{n=0}^{N}|b_n(1-\varepsilon)^n|^2\sum_{n=0}^{N}\left|\frac{z^n}{(1-\varepsilon)^n}\right|^2$$

Pour $|z| < 1-\varepsilon$ on peut faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n|\right)^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 (1-\varepsilon)^{2n} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n}}{(1-\varepsilon)^{2n}}$$

Or avec la formule sur les sommes géométriques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n}}{(1-\varepsilon)^{2n}} = \frac{1}{1-\frac{|z|^2}{(1-\varepsilon)^2}},$$

donc ici

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n z^n| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n^2 (1-\varepsilon)^{2n}\right)^{1/2} \left(1-\frac{|z|^2}{|1-\varepsilon|^2}\right)^{-1/2}$$

ce qui est la formule attendue.

b) Pour $|z| < 1$, on choisit $\varepsilon < 1-|z|$ de sorte que $|z| < 1-\varepsilon$.

Par la question 13 on a $|||f||| \leqslant 1$ donc $\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n^2 (1-\varepsilon)^{2n} \leqslant 1$ donc par l'inégalité qu'on vient de prouver au a) :

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n z^n| \leqslant \left(1-\frac{|z|^2}{|1-\varepsilon|^2}\right)^{-1/2}$$

d'où en faisant tendre ε vers 0 :

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n z^n| \leqslant \left(1-|z|^2\right)^{-1/2}.$$

Comme on a aussi par la question 19 : $\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|\,|z|^n \leqslant M(|z|)$ on obtient bien

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|\,|z|^n \leqslant m(|z|)$$

Ouf!!